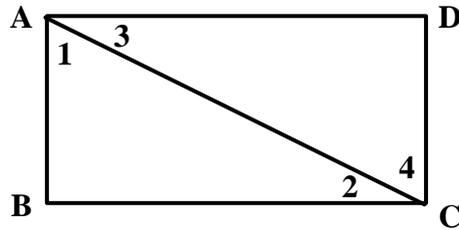


(69)多邊形內角

我們先從三角形談起，大家都知道三角形的內角和是 180° ，在下面，我們要正式證明這一點。請看下圖：



上圖的四方形是一個長方形，我們可以得到以下的式子：

$$\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$$

$$\angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$$

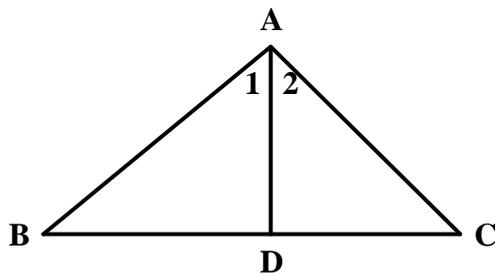
$$\angle 3 = \angle 2$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ$$

\therefore 我們得知 $\triangle ABC$ 內角和是 180° ， $\triangle ABC$ 是一個直角三角形。我們因此得知直角三角形的內角和是 180° 。

一般三角形的內角和是否也是 180° 呢？請看下圖：



$\triangle ABC$ 是一個一般三角形，假設 $AD \perp BC$ ，我們可以得到以下的式子：

$$\angle 1 + \angle B = 90^\circ$$

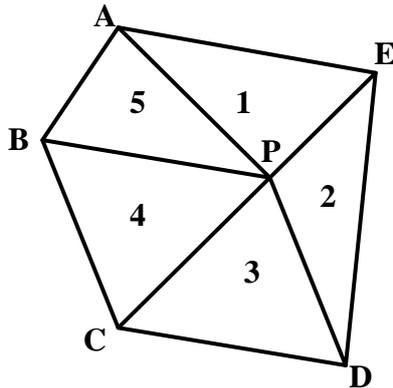
$$\angle 2 + \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

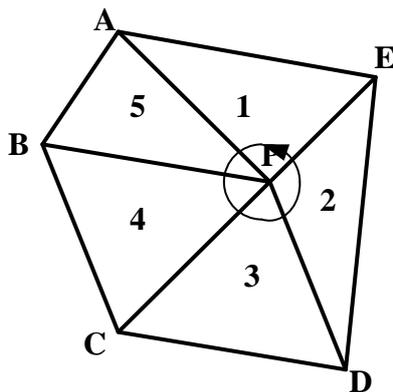
故一般三角形的內角和也是 180° 。正三角形三內角相等，因此正三角形的內角都是 60° 。

以下我們要討論多邊形的內角。

請看下圖：



上圖中的多邊形是一個五邊形，我們在此五邊形中任取一點 P，從 P 連線到所有的端點，因此我們得到 5 個三角形。每一個三角形的內角和都是 180° ，5 個三角形的內角和因此是 $5 \times 180^\circ = 900^\circ$ 。但是連接 P 點的內角不是五邊形的內角，必須去掉。以上圖為例， $\angle APB$ 和 $\angle EPD$ 都不是五邊形的內角，這種角一共有 5 個，這 5 個角的和是 360° ，如下圖所示。



因此，一個 m 邊形的內角和是 $m180^\circ - 360^\circ = (m - 2)180^\circ$

三角形， $m=3$ ，內角和是 $(3 - 2)180^\circ = 180^\circ$

四邊形， $m=4$ ，內角和是 $(4 - 2)180^\circ = 360^\circ$

五邊形， $m=5$ ，內角和是 $(5-2)180^\circ = 540^\circ$

如果一個多邊形是正多邊形，則所有的內角都是相等的，因此一個正 m 邊形的內角是 $\frac{(m-2)180^\circ}{m}$

三角形， $m=3$ ，內角 $=\frac{(3-2)180^\circ}{3} = 60^\circ$

四邊形， $m=4$ ，內角 $=\frac{(4-2)180^\circ}{4} = 90^\circ$

五邊形， $m=5$ ，內角 $=\frac{(5-2)180^\circ}{5} = 108^\circ$

(1) 已知一個 m 邊形的內角和是 A ，求 m

$$(m-2)180^\circ = A$$

$$180^\circ m - 360^\circ = A$$

$$180^\circ m = A + 360^\circ$$

$$\therefore m = \frac{A + 360^\circ}{180^\circ}$$

例 1: $A=180^\circ$

$$m = \frac{180^\circ + 360^\circ}{180^\circ} = \frac{540^\circ}{180^\circ} = 3$$

例 2: $A=540^\circ$

$$m = \frac{540^\circ + 360^\circ}{180^\circ} = \frac{900^\circ}{180^\circ} = 5$$

例 3: $A=720^\circ$

$$m = \frac{720^\circ + 360^\circ}{180^\circ} = \frac{1080^\circ}{180^\circ} = 6$$

(2) 已知一個正 m 邊形的內角和是 A ，求 m

$$\frac{(m-2)180^\circ}{m} = A$$

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{m} = A$$

$$\frac{360^\circ}{m} = 180^\circ - A$$

$$m = \frac{360^\circ}{180^\circ - A}$$

例 4: $A=60^\circ$

$$m = \frac{360^\circ}{180^\circ - 60^\circ} = \frac{360^\circ}{120^\circ} = 3$$

例 5: $A=90^\circ$

$$m = \frac{360^\circ}{180^\circ - 90^\circ} = \frac{360^\circ}{90^\circ} = 4$$

例 6: $A=120^\circ$

$$m = \frac{360^\circ}{180^\circ - 120^\circ} = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$$