(60)矩陣的應用

高斯消去法和矩陣的關係

請看下列的三元一次聯立方程式

$2x+y+z=5$
$x+y+2z=6$
$-x+2y+3z=3$

相信同學都會解這個題目，但多少會有手忙腳亂的可能。高斯消去法的好處是可以將以上的題目化解成以下的題目:

$2x+y+z=5$……(1)
$y+3z=7$……(2)
$z=3$……(3)

一旦得到了以上的式子，答案就可以很快求得了。

從(3)可知 $z=3$

代(3)入(2)，得 $y=7-3z=7-9=-2$……(4)

代(3)和(4)入(1)，得 $2x=5-(-2)-3=4$，$x=2$

答案: $x=2$, $y=-2$, $z=3$

以下我們看更多的例子

我們現在用一個三元一次聯立方程式來解釋高斯消去法，請看下例:

(1) $x+y+z=6$……(1)
$-x+2y-3z=-6$……(2)
$2x-y+3z=9$……(3)

我們先消去(2)和(3)的 x，保留(1)

(1)+(2)及(1)x2-(3)得

$x+y+z=6$……(4)
$3y-2z=0$……(5)
$3y-z=3$……(6)

我們再消去(5)和(6)的 y

(5)-(6)得 $-z=-3$……(7)

由(7)可得 $z=3$……(8)

代(8)入(6)　$3y=6$, $y=2$……(9)

代(8),(9)入(4)　$x+2+3=6$, $x=1$

答案是 $x=1$, $y=2$, $z=3$

(2) $x+2y+z=8$……(1)
　　$x-y+2z=9$……(2)
　　$-x+2y-3z=-12$……(3)

先消去(2)和(3)的 x，保留(1)

(1)-(2)及(1)+(3)得

$x+2y+z=8$……(4)
$3y-z=-1$……(5)
$4y-2z=-4$……(6)

再消去(5)和(6)的 y，保留(5)

(5)x4-(6)x3 得

$x+2y+z=8$……(7)
$3y-z=-1$……(8)
$2z=8$……(9)

從(9)，$z=4$……(10)

代(10)入(8)　3y-4=-1, y=1……(11)

代(10),(11)入(7)　x+2+4=8, x=2

答案是 x=2, y=1, z=4

(3) 2x-y+z=3……(1)
　　-2x-2y+z=-2……(2)
　　x+y+2z=6……(3)

先消去(2)和(3)的 x，保留(1)

(1)+(2)及(1)-(3)x2 得

2x-y+z=3……(4)
-3y+2z=1……(5)
-3y-3z=-9……(6)

(5)-(6)得 5z=10, z=2……(7)

再消去(5)和(6)的 y，保留(5)

代(7)入(5)　-3y+4=1, y=1……(8)

代(7),(8)入(4)　2x-1+2=3, x=1

答案是 x=1, y=1, z=2

高斯消去法也可以用矩陣來解決，以下的例子是容易瞭解的。

(4) 2x-3y=-4……(1)
　　x+3y=7……(2)

我們將以上的式子寫成矩陣形式如下:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(第一列)-(第二列)x2

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -18 \end{bmatrix}$$

我們因此得到-9y=-18，y=2……(3)

代(3)入(1) 2x-6=-4，x=1

答案：x=1，y=2

(5) x+y+z=6……(1)

-x-2y+z=-1……(2)

x+3y-2z=-1……(3)

矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(第一列)+(第二列)，(第一列)-(第三列)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(第二列)x2-(第三列)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

因此，我們得到

x+y+z=6……(4)

-y+2z=5……(5)

z=3……(6)

代(6)入(5)　-y+6=5，y=1……(7)

代(6)及(7)入(4) x+1+3=6，x=2

答案：x=2，y=1，z=3

(6) x+y-2z=3……(1)
　　-x+3y-z=6……(2)
　　2x-y+3z=4……(3)

矩陣形式：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\\ 4\end{bmatrix}$$

(第一列)+(第二列)，(第一列)x2-(第三列)

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & 3 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 9\\ 2\end{bmatrix}$$

(第二列)x3-(第三列)x4

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 9\\ 19\end{bmatrix}$$

得 x+y-2z=3……(4)
　4y-3z=9……(5)
　19z=19……(6)

因此，從(6)得 z=1……(7)

代(7)入(5) 4y-3=9，y=3……(8)

代(7)及(8)入(4) x+3-2=3，x=2

答案：x=2，y=3，z=1

（7）x+y+z=1……（1）

-x+2y+z=1……（2）

x-y+2z=9……（3）

矩陣形式：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 9\end{bmatrix}$$

（第一列)+(第二列)，（第一列)-(第三列）

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -8\end{bmatrix}$$

（第二列)x2-(第三列)x3

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 28\end{bmatrix}$$

因此，得 x+y+z=1……（4）

3y+2z=2……（5）

7z=28……（6）

從(6)得 z=4……（7）

代(7)入（5）3y+8=2，y=-2……（8）

代(7)及(8)入（4）x-2+4=1，x=-1

答案：x=-1，y=-2，z=4

（8）x+y+2z=13……（1）

-2x-y+z=-3……（2）

3x+y-z=5……（3）

矩陣形式:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\-2 & -1 & 1\\3 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\-3\\5\end{bmatrix}$$

(第一列)x2+(第二列), (第一列)x3-(第三列)

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 5\\0 & 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\23\\34\end{bmatrix}$$

(第二列)x2-(第三列)

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 5\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\23\\12\end{bmatrix}$$

因此,得 x+y+2z=13……(4)
y+5z=23……(5)
3z=12……(6)

從(6)得 z=4……(7)

代(7)入(5) y+20=23, y=3……(8)

代(7)及(8)入(4) x+3+8=13, x=2

答案: x=2, y=3, z=4

利用反矩陣解二元一次聯立方程式

假設有一個二元一次聯立方程式,我們可以用矩陣方式來表示:

AX=B

舉一個例,

2x+3y=11
-3x+4y=9

矩陣表示是:

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\-3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\9\end{bmatrix}$$

AX=B

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\-3 & 4\end{bmatrix},\ \ \mathrm{B}=\begin{bmatrix}11\\9\end{bmatrix}$$

但$\mathrm{A}^{-1}A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$$

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\-3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{2\times 4+3\times 3}\begin{bmatrix}4 & -3\\3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{17} & \frac{-3}{17}\\\frac{3}{17} & \frac{2}{17}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=\begin{bmatrix}\frac{4}{17} & \frac{-3}{17}\\\frac{3}{17} & \frac{2}{17}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{17}\times 11-\frac{3}{17}\times 9\\\frac{3}{17}\times 11+\frac{2}{17}\times 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{44-27}{17}\\\frac{33+18}{17}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{17}{17}\\\frac{51}{17}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

$\therefore x=1, y=3$

答案: $x=1, y=3$

(9) x+3y=11

x−2y=−4

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\-4\end{bmatrix}$$

$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & -2\end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\left[\begin{smallmatrix}11\\-4\end{smallmatrix}\right]$

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{1\times(-2)-3\times1}\begin{bmatrix}-2 & -3\\-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\\frac{1}{5} & \frac{-1}{5}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\\frac{1}{5} & \frac{-1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\times11+\frac{3}{5}\times(-4)\\\frac{1}{5}\times11+\left(\frac{-1}{5}\right)\times(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{22-12}{5}\\\frac{11+4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10}{5}\\\frac{15}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$\therefore x=2, y=3$

答案：$x=2, y=3$

（10）3x+2y=4
x−y=3

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}$, $\mathrm{B}=\left[\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right]$

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{3\times(-1)-2\times1}\begin{bmatrix}-1 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\\frac{1}{5} & \frac{-3}{5}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{-3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\times 4+\frac{2}{5}\times 3\\ \frac{1}{5}\times 4+\left(\frac{-3}{5}\right)\times 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4+6}{5}\\ \frac{4-9}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10}{5}\\ \frac{-5}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

$\therefore x=2, y=-1$

答案：$x=2, y=-1$

（11）3x−y=14
x+y=6

$$\begin{bmatrix}3 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\6\end{bmatrix}$$

$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}14\\6\end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{3\times 1+1}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\times 14+\frac{1}{4}\times 6\\ \frac{-1}{4}\times 14+\frac{3}{4}\times 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{14+6}{4}\\ \frac{18-14}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{20}{4}\\ \frac{4}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$

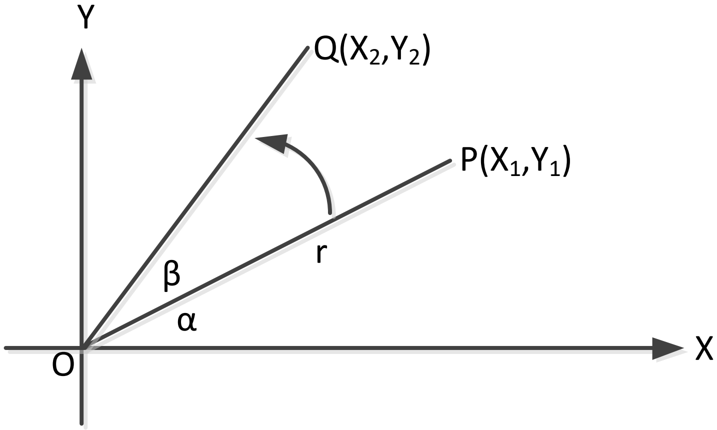
$$\therefore\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$

$\therefore x=5, y=1$

答案：$x=5, y=1$

矩陣和幾何的關係

請看下圖:



假設我們要將P(x_1, y_1)旋轉一個角度β，而維持$\overline{OP}$的長度。$|\overline{OP}| = \mathrm{r}$，$\overline{OP}$對 x 軸的夾角是 α，求 Q 點座標$x_2$和$y_2$。

因為$|\overline{OQ}| = |\overline{OP}| = \mathrm{r}$，因此

$$x_2 = \mathrm{r}\cos(\alpha+\beta) = r(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \qquad (60\text{-}1)$$

$$y_2 = r\sin(\alpha+\beta) = r(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \qquad (60\text{-}2)$$

但$x_1 = r\cos\alpha$ (60-3)

$$y_1 = r\sin\alpha \qquad (60\text{-}4)$$

故$\cos\alpha = \frac{x_1}{r}$ (60-5)

$$\sin\alpha = \frac{y_1}{r} \qquad (60\text{-}6)$$

將(60-3)及(60-4)代入(60-1)及(60-2)，可得

$$x_2 = x_1\cos\beta - y_1\sin\beta \qquad (60\text{-}7)$$

$y_2 = x_1 \sin\beta + y_1 \cos\beta$ （60-8）

我們可以用矩陣來表示(60-7)及(60-8)

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

(12)$x_1 = 1$，$y_1 = 1$，$\alpha = 45°$

將$\mathrm{P}(x_1, y_1)$轉 $90°$，$\beta = 90°$

$\cos\beta = 90° = 0$，$\sin\beta = \sin 90° = 1$

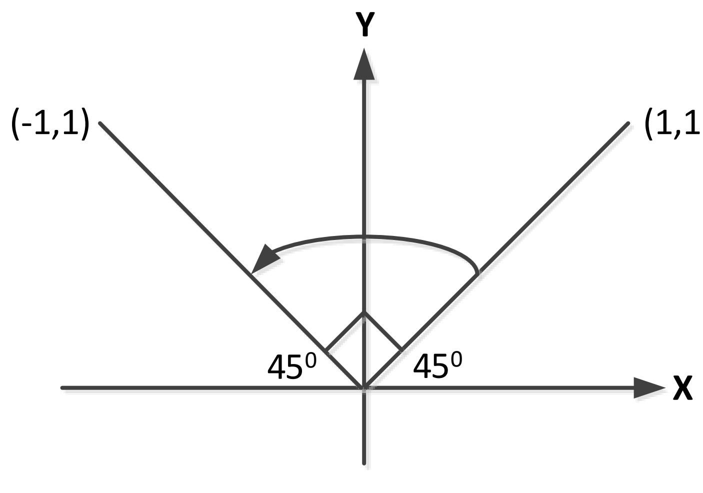
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad x_2 = -1$

$y_2 = 1$

如下圖所示，答案是正確的。



(13) $x_1 = \sqrt{3}$，$y_1 = 1$，$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30°$

將$\mathrm{P}(x_1, y_1)$轉 60°，β = 60°

$$\cos\beta = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\sin\beta = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

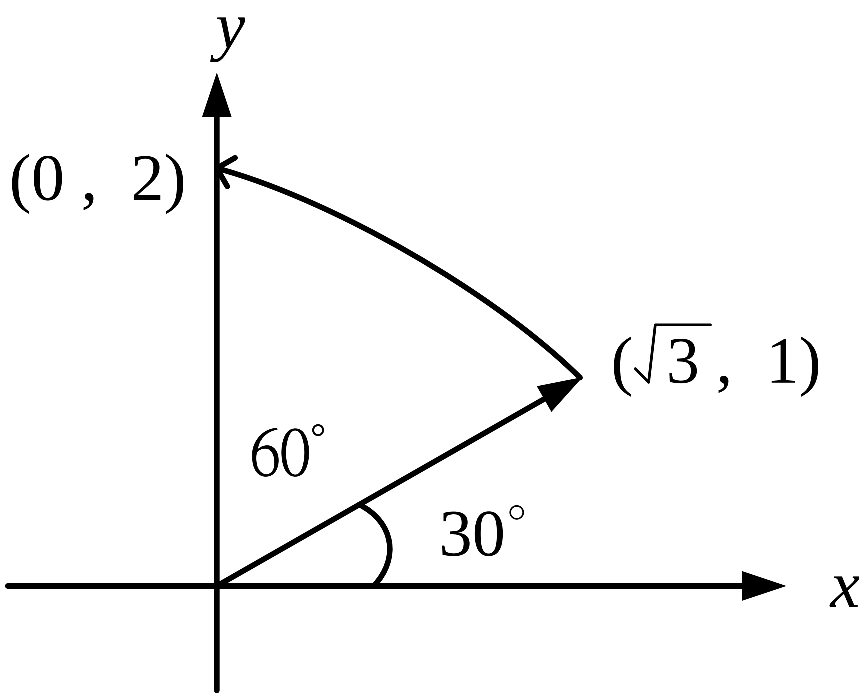
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{(\sqrt{3})^2}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$x_2 = 0$

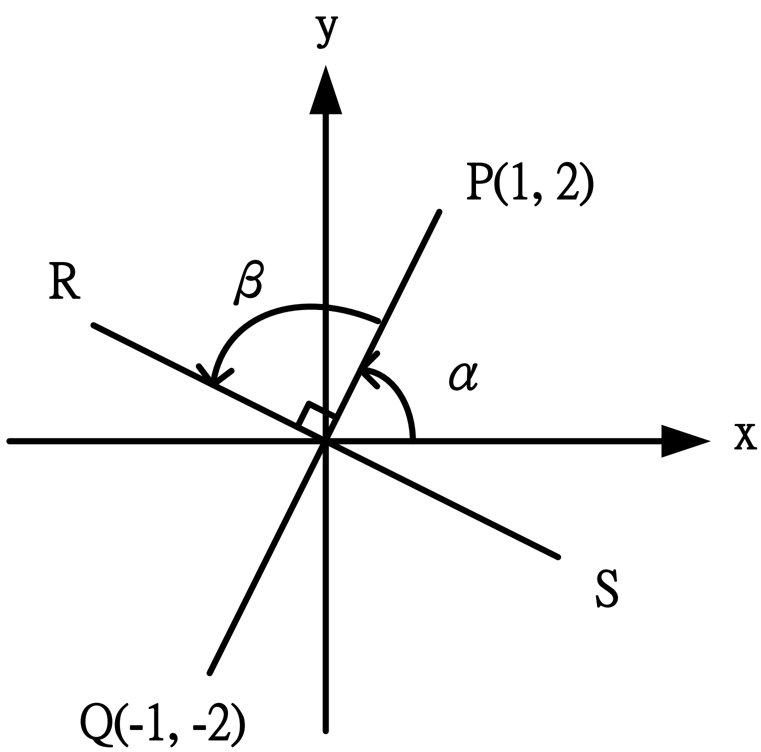
$y_2 = 2$

如下圖所示



答案是正確的

(14)



將$\overline{PQ}$轉 90°，β = 90°

$\cos\beta = 90° = 0$，$\sin\beta = \sin 90° = 1$

求 R 和 S

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [P \quad Q] = [R \quad S]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

因此 R=(−2, 1)，S=(2, −1)

我們可以看一下，$\overline{PQ}$和$\overline{SR}$是否互相垂直

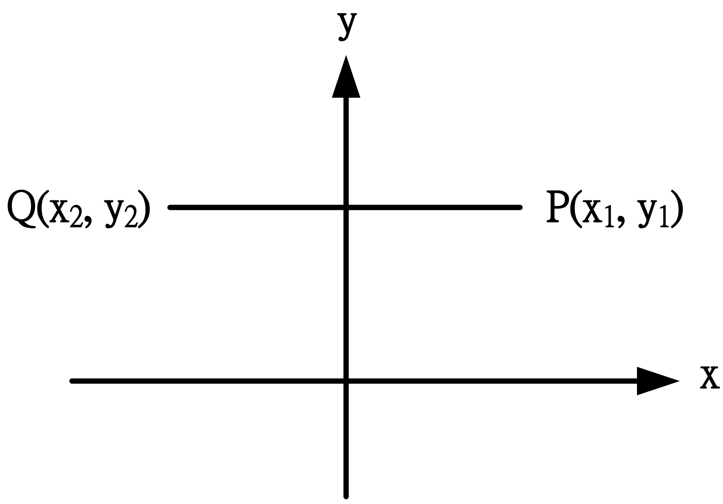
$\overline{PQ}$的向量是$\big(1-(-1), 2-(-2)\big) = (2,4) = \overrightarrow{V_1}$

$\overline{SR}$的向量是$\big(-2-2, 1-(-1)\big) = (-4,2) = \overrightarrow{V_2}$

$\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = 2 \times (-4) + 4 \times 2 = -8 + 8 = 0$

$\overline{PQ}$和$\overline{SR}$是互相垂直的，證明我們的答案正確。

請看下圖



我們已知P(x_1, y_1)，Q(x_2, y_2)是 P 點對 y 軸的對稱點，求x_2和y_2的值。

因為 Q 是 P 對 y 軸的對稱點，因此

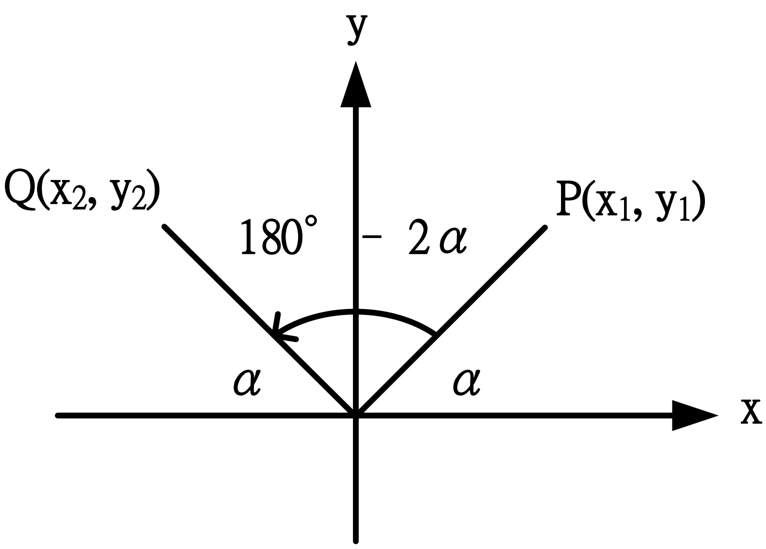
$x_2 = -x_1$

$y_2 = y_1$

用矩陣來表示

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

但我們也可以用前面所談的方法來說明這個對 y 軸對稱點問題



如上圖所示，我們可以將對稱點問題看成角度轉換問題，Q 為 P 的 y 軸對稱點，如果$\overline{OP}$和 x 軸之間的夾角為α，則$\overline{OQ}$和 x 軸之間的夾角也是α，因此$\beta = 180° - 2\alpha$。

根據(60-7)及(60-8)

$$x_2 = x_1\cos(180° - 2\alpha) - y_1\sin(180° - 2\alpha) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (60-9)$$

$$y_2 = x_1\sin(180° - 2\alpha) + y_1\cos(180° - 2\alpha) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (60-10)$$

用矩陣來表示

$$\begin{bmatrix} \cos(180° - 2\alpha) & -\sin(180° - 2\alpha) \\ \sin(180° - 2\alpha) & \cos(180° - 2\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

(15) $x_1 = 1$，$y_1 = \sqrt{3}$，

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = 60°$$

$$\beta = 180° - 2\alpha = 180° - 120° = 60°$$

$$\cos\beta = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$\sin\beta = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x_2 = -1,\ y_2 = \sqrt{3}$

這個答案是正確的，因為

$x_2 = -x_1$

$y_2 = y_1$

證明$\mathrm{Q}(x_2, y_2)$是$\mathrm{P}(x_1, y_1)$的 y 軸對稱點

（16）$x_1 = \sqrt{3}$，$y_1 = 1$，$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30°$

$\beta = 180° - 2\alpha = 180° - 60° = 120°$

$\cos\beta = \cos 120° = \frac{-1}{2}$

$\sin\beta = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x_2 = -\sqrt{3},\ y_2 = 1$

答案是正確的，因為

$x_2 = -x_1$

$y_2 = y_1$

∴ $Q(x_2, y_2)$是$P(x_1, y_1)$的 y 軸對稱點

也許同學們會問，如果$Q(x_2, y_2)$是$P(x_1, y_1)$在 y 軸的對稱點，α是$\overline{OP}$和 x 軸之間的夾角，我們可以用以下的矩陣求得x_2和y_2

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \cdots\cdots (1)$$

因為

$x_2 = -x_1$

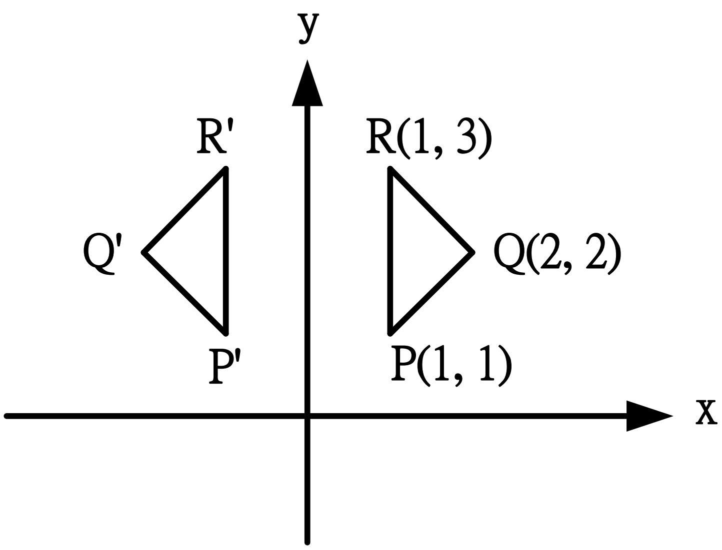
$y_2 = y_1$

假如求 y 軸對稱點時有很多點，用

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

這個矩陣比較恰當

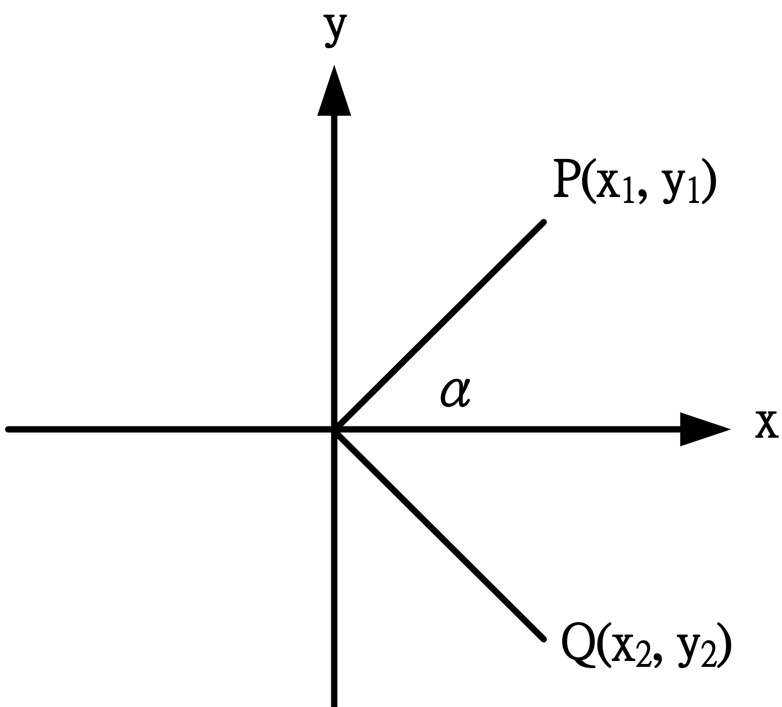
(17)請看下圖



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

∴得到$P'(-1,1), Q'(-2,2)$及$R'(-1,3)$三點

除了對 y 軸以外，我們也可以利用矩陣求對 x 軸的對稱點



我們可以看到

$x_2 = x_1$

$y_2 = -y_1$

矩陣表示法

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

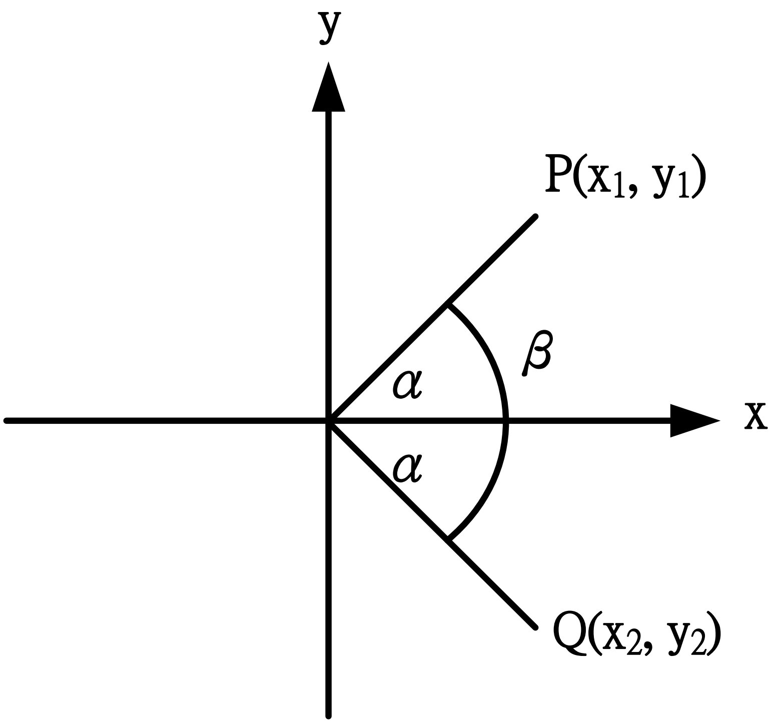
（18）$x_1 = 3$，$y_1 = 5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x_2 = 3$，$y_2 = -5$

(19)我們也可以用角度轉換來解決求 x 軸的對稱點

假設$|\overline{OP}| = 1$



如上圖所示，$\beta = -2\alpha$

矩陣表示法

$$\begin{bmatrix} \cos(-2\alpha) & -\sin(-2\alpha) \\ \sin(-2\alpha) & \cos(-2\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

但$x_1 = \cos\alpha$

$y_1 = \sin\alpha$

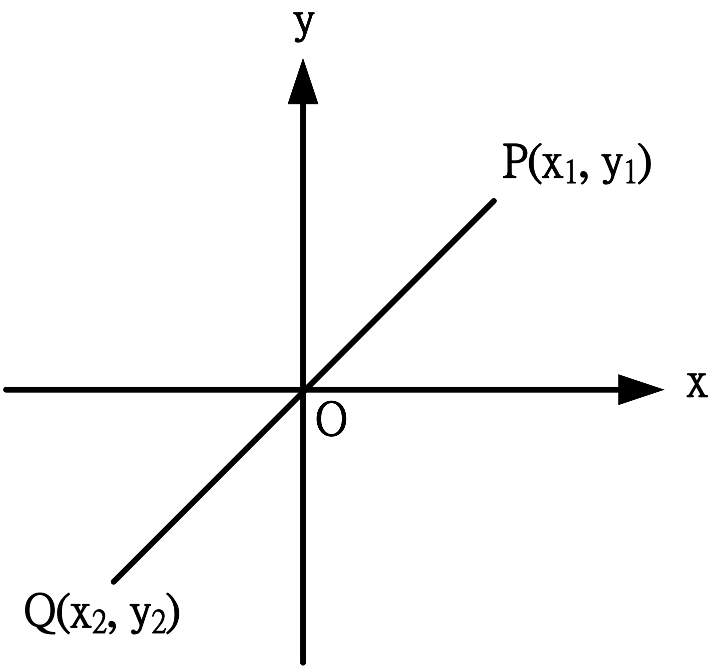
$$\begin{bmatrix} \cos(-2\alpha) & -\sin(-2\alpha) \\ \sin(-2\alpha) & \cos(-2\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-2\alpha)\cos\alpha - \sin(-2\alpha)\sin\alpha \\ \sin(-2\alpha)\cos\alpha + \cos(-2\alpha)\sin\alpha \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(-2\alpha + \alpha) \\ \sin(-2\alpha + \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ \ x_2 = x_1$

$y_2 = -y_1$

可見得求 x 軸的對稱點也可以被看成角度轉換問題

(20)對原點的對稱點



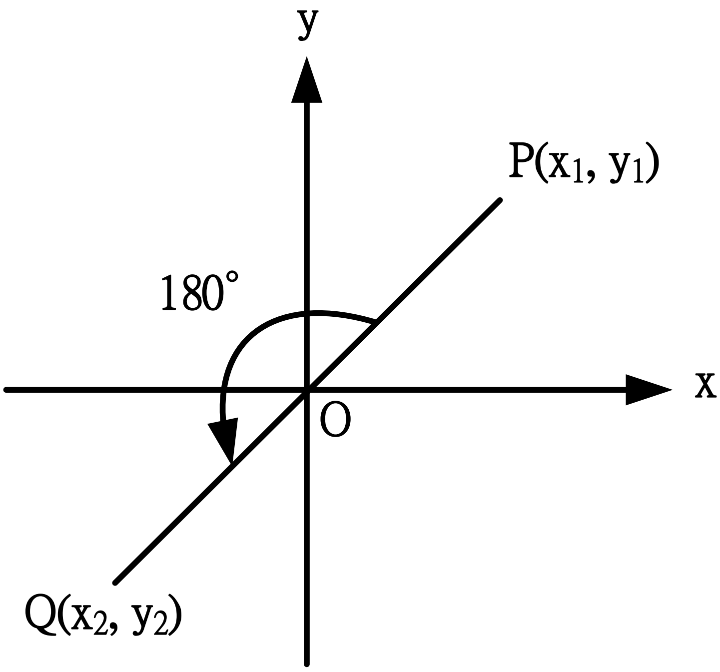
如上圖，$x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$

矩陣表示法

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

我們也可以用角度旋轉來解釋對原點的對稱點求法。

請看下圖:



如上圖所示，$\beta = 180°$

$\cos 180° = -1$

$\sin 180° = 0$

$$\begin{bmatrix} \cos 180° & -\sin 180° \\ \sin 180° & \cos 180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

∴對原點求對稱點的矩陣公式是

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

(21)假設有一點$P(x_1, y_1)$，轉$90°$

$\beta = 90°$

$\cos\beta = \cos 90° = 0$

$\sin\beta = \sin 90° = 1$

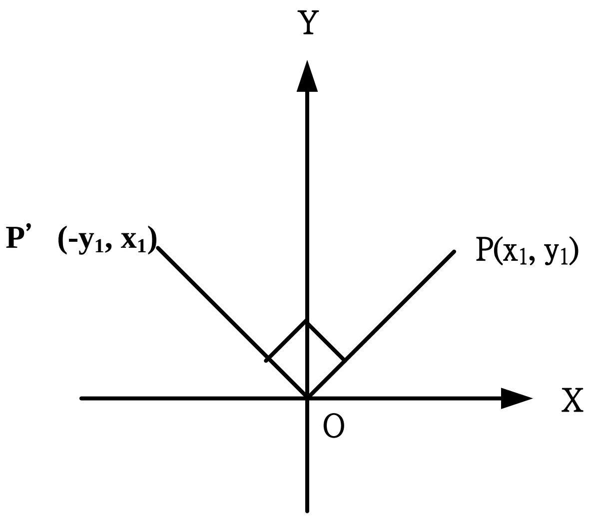
$\therefore \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

也就是說

$x_2 = -y_1$

$y_2 = x_1$

請看下圖



我們看看$\overline{OP}$和$\overline{OP'}$是否互相垂直?

$\overline{OP}$的向量是$(x_1, y_1\ ) = V_1$

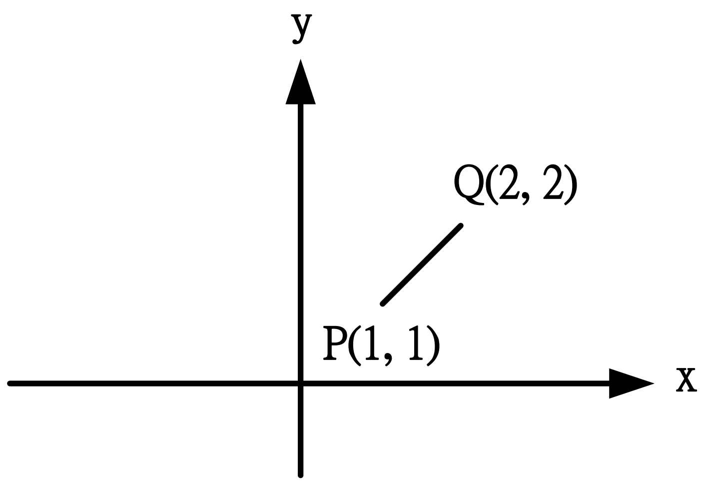
$\overline{OP'}$的向量是$(x_2, y_2\ ) = (-y_1, x_1\ ) = V_2$

因此兩個向量的內積是

$V_1 \cdot V_2 = x_1(-y_1) + y_1x_1 = -x_1y_1 + x_1y_1 = 0$

所以$\overline{OP}$和$\overline{OP'}$是互相垂直的

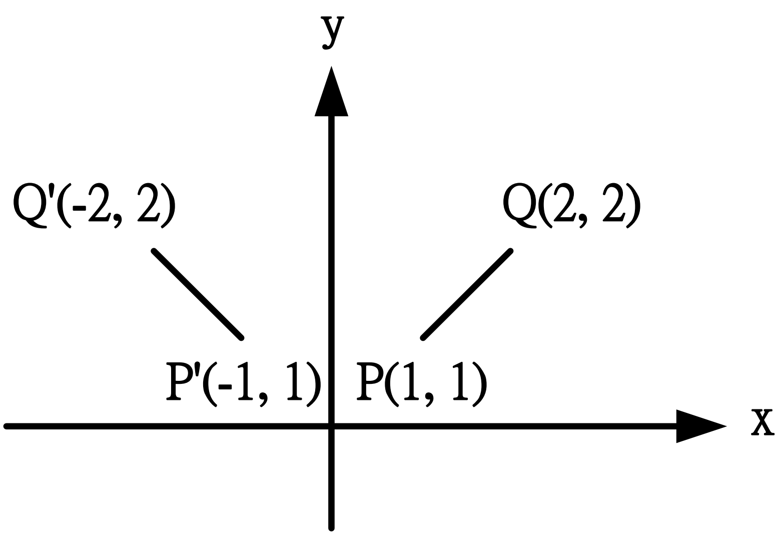
(22)有一條直線，兩端點是P(1,1)，Q(2,2)，如下圖所示:



轉90°

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

因此轉了90°以後，得$P'(-1,1), Q'(-2,2)$，如下圖:



$\overline{PQ}$的向量是$V_1=(2-1,2-1)=(1,1)$

$\overline{P'Q'}$的向量是$V_2=(-2-(-1),2-1)=(-1,1)$

$V_1 \cdot V_2 = 1 \times (-1) + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$

$\therefore \overline{PQ}$和$\overline{P'Q'}$是互相垂直的

(23)$P = (1, \sqrt{3})$，P 旋轉 90°以後的點是 P´

$P' = (-\sqrt{3}, 1)$

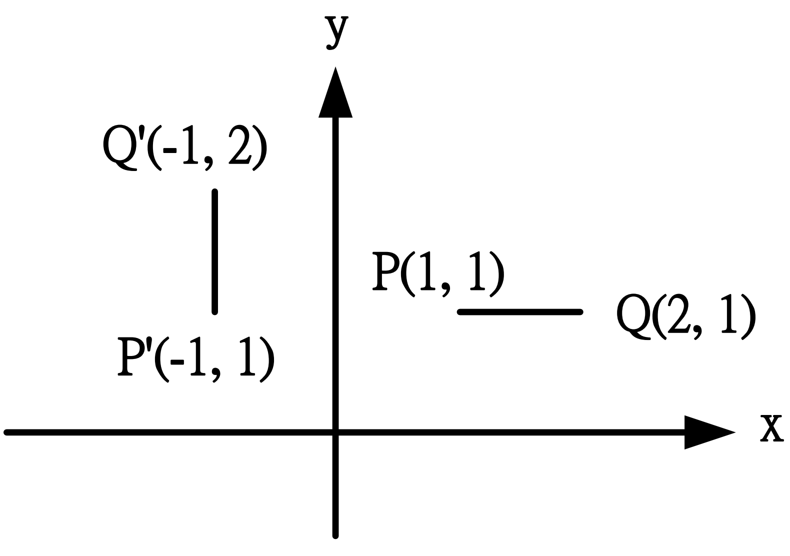
$\overline{OP}$和 x 軸的夾角是$\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = 30°$

OP'和 x 軸的夾角是$\tan^{-1}\frac{1}{-\sqrt{3}} = -60°$

(24)直線兩端點是P(1,1)，Q(2,1)，轉90°

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

旋轉後，直線如下圖:



$\overline{PQ}$的向量是$V_1 = (2-1, 1-1) = (1,0)$

$\overline{P'Q'}$的向量是$V_2 = (-1-(-1), 2-1) = (0,1)$

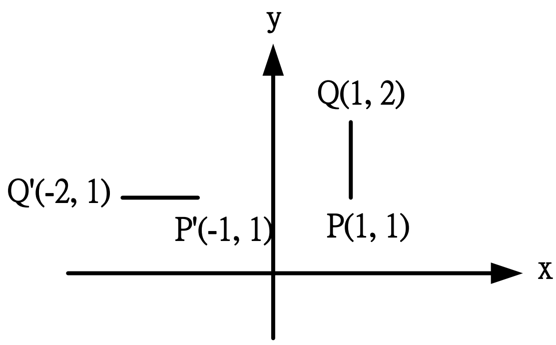
$V_1 \cdot V_2 = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0 + 0 = 0$

$\therefore \overline{PQ}$和$\overline{P'Q'}$是互相垂直的

(25)直線兩端點是P(1,1)，Q(1,2)，轉90°

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

旋轉後，直線如下圖:



$\overline{PQ}$的向量是$V_1 = (1-1, 2-1) = (0,1)$

$\overline{P'Q'}$的向量是$V_2 = (-2-(-1), 1-1) = (-1,0)$

$V_1 \cdot V_2 = 0 \times (-1) + 1 \times 0 = 0 + 0 = 0$

$\therefore \overline{PQ}$和$\overline{P'Q'}$是互相垂直的