(57)複數的幾何意義

假設我們有兩個複數：

$Z_1 = a_1 + b_1 i$
$Z_2 = a_2 + b_2 i$

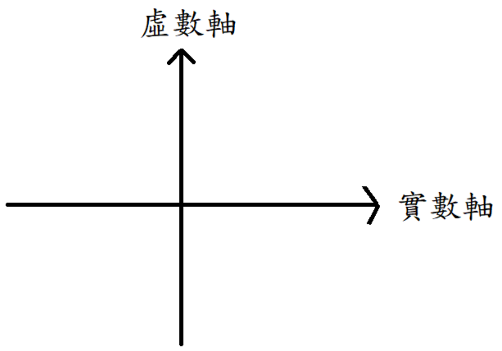
則$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

同學們一定會想起向量，假設我們有兩個向量：

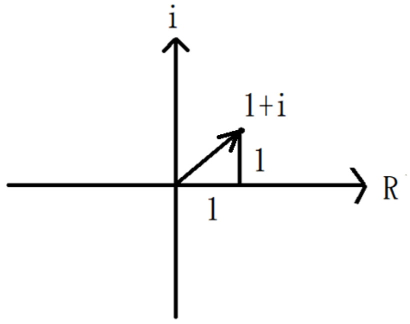
$\overrightarrow{V_1} = (a_1\ ，b_1)$
$\overrightarrow{V_2} = (a_2\ ，b_2)$

則$\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = (a_1 + a_2\ ，b_1 + b_2)$

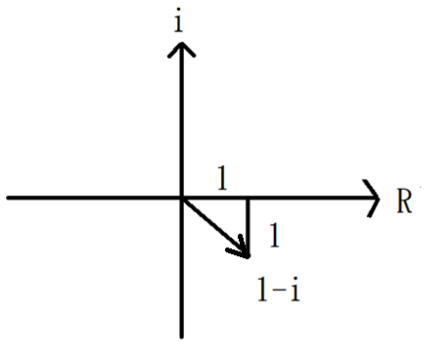
因此，我們可以將實數放到平面上去，請看下圖



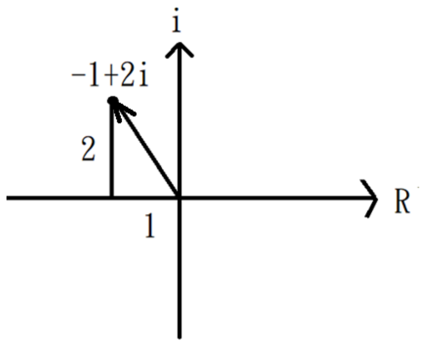
以下舉例說明



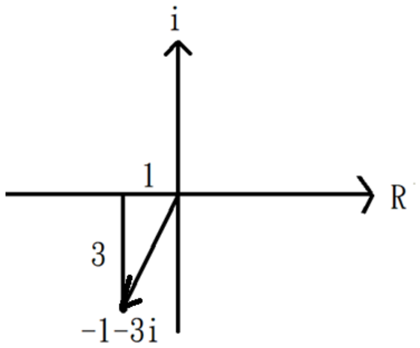
1+i



1−i

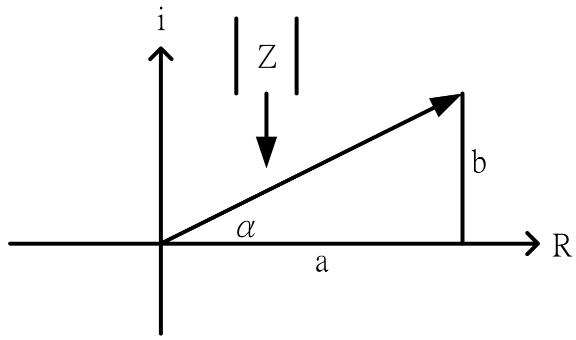


−1+2i



−1−3i

從以上的圖中，我們可以給複數一個絕對值和角度，這個角度對應實數軸



假設$Z = a + ib$，Z的絕對值$|Z|$的定義如下：

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = |Z|cos\alpha$$

$$b = |Z|sin\alpha$$

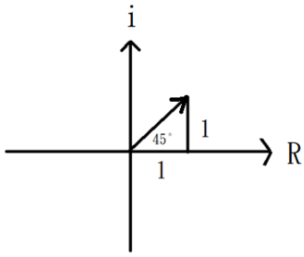
$$\alpha = tan^{-1}\frac{b}{a}$$

(1)$Z=1+i$

$a=1$，$b=1$

$|Z|=\sqrt{1^2+1^2}$

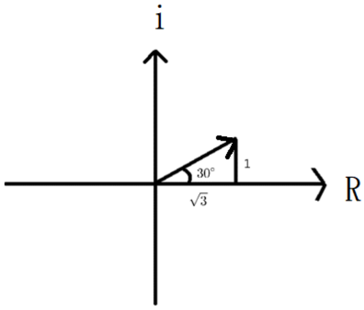
$\alpha=tan^{-1}\frac{b}{a}=tan^{-1}\frac{1}{1}=45^{\circ}$



(2)$Z=\sqrt{3}+i$

$|Z|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

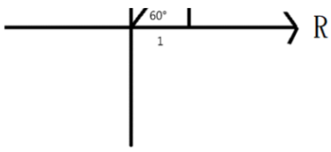
$\alpha=tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}=30^{\circ}$



(3)$Z=1+\sqrt{3}i$

$|Z|=\sqrt{1+3}=2$

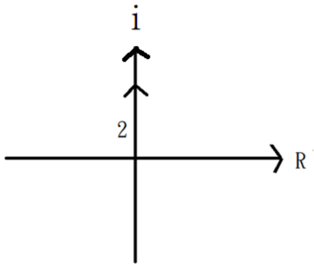
$\alpha=tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}=60^{\circ}$



(4)$Z=2i$

$|Z|=\sqrt{2^2}=2$

$\alpha=tan^{-1}\infty=90^{\circ}$

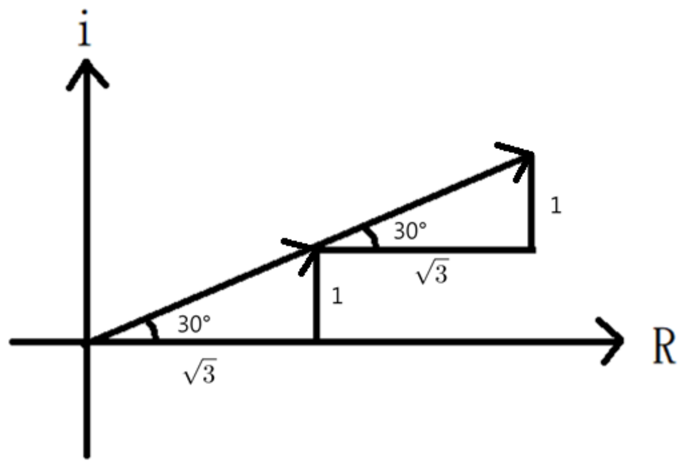


複數的加減

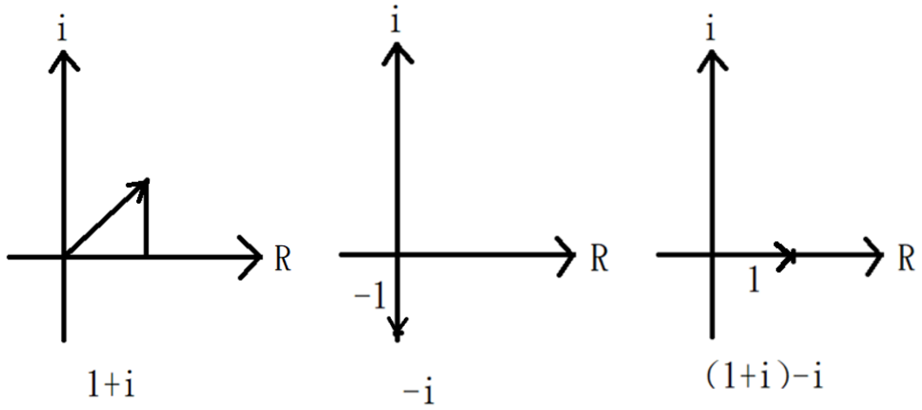
複數可以用向量來表示，因此複數的加減和向量加減是相像的。

(5)$\left(1+\sqrt{3}i\right)+\left(1+\sqrt{3}i\right)=2+2\sqrt{3}i=2(1+\sqrt{3}i)$

同學們可以看出兩個複數的角度都是30°，相加以後角度仍然是30°，如下圖示意



(6)$(1+\mathrm{i})-\mathrm{i}=1$



複數的乘法

在前面，我們提到複數的角度，複數的乘法和角度是有關的，我們先以一個例子來說明：

$Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

這個複數的角度是$\alpha=tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}=30^{\circ}$

假設我們求$Z\times Z=Z^2$

$$Z' = Z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{3}{4} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 i^2$$

$$= \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

我們求得Z'的角度是$\beta = tan^{-1}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = tan^{-1}\sqrt{3} = 60^{\circ}$

Z的角度是30°，$Z' = Z \times Z$的角度是60°，正好等於$30^{\circ} + 30^{\circ}$，這究竟是怎麼一回事，我們在下面可以解釋清楚。

假設$Z_1 = (a_1 + b_1 i)$

$Z_2 = (a_2 + b_2 i)$

Z_1的角度是$\alpha = tan^{-1}\frac{b_1}{a_1}$

Z_2的角度是$\beta = tan^{-1}\frac{b_2}{a_2}$

$a_1 = |Z_1|cos\alpha$

$b_1 = |Z_1|sin\alpha$

$a_2 = |Z_2|cos\beta$

$b_2 = |Z_2|sin\beta$

$$Z_1 \times Z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + b_2a_1)i$$

$$a_1a_2 - b_1b_2 = |Z_1||Z_2|(cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta) = |Z_1||Z_2|(\cos(\alpha+\beta))$$

$$a_2b_1 + b_2a_1 = |Z_1||Z_2|(cos\beta sin\alpha + sin\beta cos\alpha) = |Z_1||Z_2|(sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta)$$

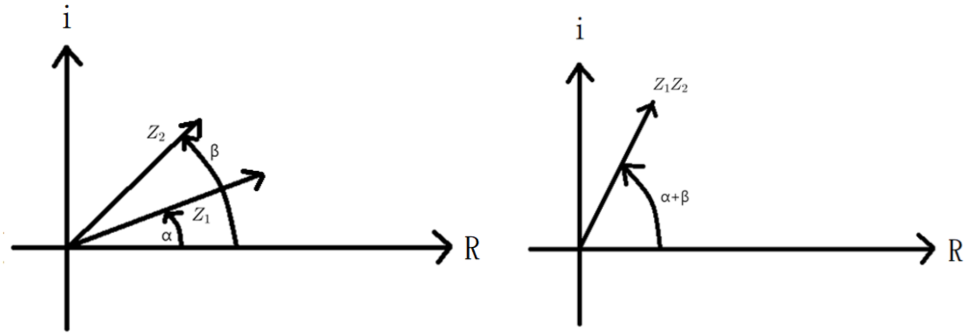
$$= |Z_1||Z_2|(sin(\alpha+\beta))$$

因此，$Z' = Z_1 \times Z_2 = |Z_1||Z_2|(\cos(\alpha+\beta) + sin(\alpha+\beta)i)$

由上式，可以看出Z'的角度是$(\alpha+\beta)$

換言之，Z'的角度是(Z_1的角度) + (Z_2的角度)

我們可以先想像$Z_1 \times Z_2$是將Z_1旋轉一個角度，Z_1原來的角度是α，Z_2的角度是β，$Z_1 \times Z_2$的結果是將Z_1旋轉一個β的角度，新的複數的角度是$(\alpha+\beta)$，如下圖所示：



(7)$Z_1 = (1+i)$

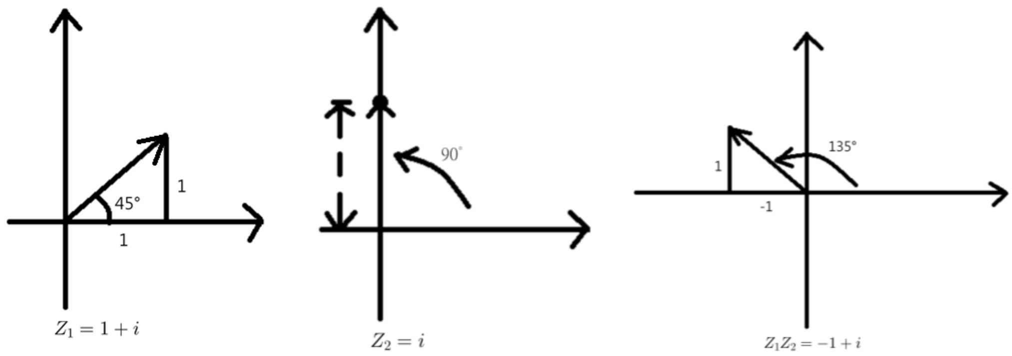
$Z_2 = i$

Z_1的角度是45°

Z_2的角度是90°

$Z' = Z_1 \times Z_2 = (1+i)i = -1+i$

以下的圖顯示了這個複數乘法的幾何意義



這個例子顯示了$Z_1 \times Z_2$是將Z_1旋轉了一個$\beta = 90^\circ$的角，因此新的複數的角度是$45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$。

(8)$Z_1 = (1+i)$

$Z_2 = (1+i)$

可以看出Z_1和Z_2的角度都是45°，相乘以後的角度應該是90°

$Z' = Z_1 \times Z_2 = (1+i)^2 = 1+2\mathrm{i}+i^2 = 2i$

Z′的角度的確是90°

(9)$Z_1=(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$

$Z_2=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

Z_1的角度是$\alpha=tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=30°$

Z_2的角度是$\beta=tan^{-1}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}=60°$

$Z'=Z_1\times Z_2$的角度應該是$30°+60°=90°$

$$Z'=Z_1\times Z_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i+\frac{1}{4}i=0+i=i$$

所以Z′的角度的確是$90°$。

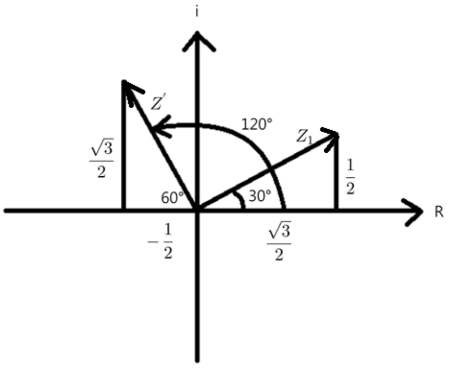
(10)$Z_1=(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$

$Z_2=\mathrm{i}$

Z_1的角度是$30°$，Z_2的角度是$90°$

Z′的角度應該是$120°$

$$Z'=Z_1\times Z_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)i=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$



如上圖所示，Z'是Z_1旋轉$90°$的結果。

同學們在高中時代，不可能知道複數旋轉的意義，複數旋轉在電路上有重大的意義，如果同學進入電機系，碰到電容和電感，就知道複數旋轉的意義了。

複數的除法

假設$a_1 = |Z_1|cos\alpha$

$b_1 = |Z_1|sin\alpha$

$a_2 = |Z_2|cos\beta$

$b_2 = |Z_2|sin\beta$

$Z_1 = a_1 + b_1 i$

$Z_2 = a_2 + b_2 i$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{a_1a_2+b_1b_2+a_2b_1 i-a_1b_2 i}{{a_2}^2+{b_2}^2} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{|Z_2|^2}$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 = |Z_1||Z_2|(cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta) = |Z_1||Z_2|\ \cos(\alpha-\beta)$$

$$a_2b_1 - a_1b_2 = |Z_1||Z_2|(cos\beta sin\alpha - cos\alpha sin\beta) = |Z_1||Z_2|(sin\alpha cos\beta - sin\beta cos\alpha)$$
$$= |Z_1||Z_2|\ \sin(\alpha-\beta)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1||Z_2|\cos(\alpha-\beta) + |Z_1||Z_2|\ \sin(\alpha-\beta)i}{|Z_2|^2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}(\cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha-\beta)i)$$

Z_1的角度是α，Z_2的角度是β，$\frac{Z_1}{Z_2}$的角度是$\alpha-\beta$，可見$\frac{Z_1}{Z_2}$的功能是產生另一複數，這個複數的角度是Z_1的角度減去Z_2的角度。

(11)$Z_1=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$Z_2=(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$

$$Z'=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)}=\frac{\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}(\sqrt{3}-i+3i-\sqrt{3}i^2)}{1}=\frac{1}{4}(2\sqrt{3}+2i)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$$

Z_1的角度是$60°$，Z_2的角度是$30°$，Z'的角度是$30°$，正好是$60°-30°$。

(12)$Z_1=i$

$Z_2=(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$

$$Z'=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{i(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Z_1的角度是$90°$，Z_2的角度是$30°$，Z'的角度是$60°$，可見得$\frac{Z_1}{Z_2}$有將角度相減的功能。

(13)$Z_1=i$

$Z_2=(1+i)$

要求Z_1和Z_2的夾角，可以用$\frac{Z_1}{Z_2}$來求

$$Z'=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{i-i^2}{1+1}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Z'的角度是$45°$，可見得Z_1和Z_2的夾角是$45°$，Z_1的角度是$90°$，Z_2的角度是$45°$，Z_1和Z_2的角度的確是$45°$。

複數的共軛值

$Z=a+ib$
$\bar{Z}=a-ib$

$\bar{Z}$是Z的共軛值

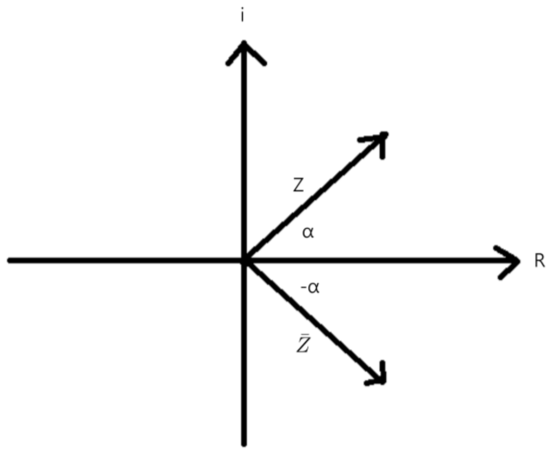
我們可以看Z和$\bar{Z}$間的角度

$$\frac{\mathrm{Z}}{\bar{Z}}=\frac{\mathrm{a}+i\mathrm{b}}{\mathrm{a}-i\mathrm{b}}=\frac{(\mathrm{a}+i\mathrm{b})(\mathrm{a}+i\mathrm{b})}{(\mathrm{a}-i\mathrm{b})(\mathrm{a}+i\mathrm{b})}=\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

Z的角度是$\tan^{-1}\frac{b}{a}=\alpha$，$\bar{Z}$的角度$tan\frac{-b}{a}=-\alpha$

$\frac{\mathrm{Z}}{\bar{Z}}$的角度是$\tan^{-1}\frac{\frac{2ab}{a^2+b^2}}{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}=\tan^{-1}\frac{2ab}{a^2-b^2}=\tan^{-1}\frac{\frac{2b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}=\tan^{-1}\frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}=\tan^{-1}(tan2\alpha)=2\alpha$

因此，我們知道Z和$\bar{Z}$之間的夾角是2α，如下圖所示



共軛是一個重要的觀念，各位同學在大學裡常常會用到的，在前面，我們已討論過一元二次方程式會有複數的根，各位不妨再複習一下，就會發現這些根都是共軛的，因為如果方程式是$\mathrm{a}x^2+bx+c=0$，

則$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

x_1和x_2是共軛的

因此，假設我們已知一個實係數一元二次方程式有一個複數的根，則這個方程式一定有一個共軛的根。以下我們所說的一元二次方程式，其係數都是實數。

(14)已知某一元二次方程式有一個根是$(1+i)$，求此方程式

此方程式是$(x-(1+i)(x-(1-i))=0$

$x^2-(1+i+1-i)x+(1+i)(1-i)=0$

$x^2-2x+(1-i^2)=0$

$x^2-2x+2=0$

我們可以用公式來求這個方程式的根：

$$\mathrm{x}=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times2}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm2i}{2}=1\pm i$$

可以看出這個方程式是對的

(15)已知某方程式的一個根是$1+2i$，求此方程式

此方程式是$(x-(1+2i)(x-(1-2i))=0$

$x^2-(1+2i+1-2i)x+(1+2i)(1-2i)=0$

$x^2-2x+(1-4i^2)=0$

$x^2-2x+5=0$

用公式可以求得此方程式的解：

$$\mathrm{x}=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times5}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm4i}{2}=1\pm2i$$

可以看出此方程式是正確的