(55)虛數

虛數是一個有些神秘的而難理解的玩意兒，但是同學們到了大學，就會發現虛數是十分有用的，電機系同學就一直在利用虛數的。

假設我們有一個一元二次方程式

$x^2-4=0$

我們的答案是$x=\pm 2$

假設我們有一個方程式是

$x^2+1=0$

問題就來了，因為$x^2=-1$，但是任何數平方後，都是正的，因此在國中時代，這個方程式是無解的。現在你們是高中生了，就應該知道$x^2=-1$仍是有解的。

假設$x^2=-1$，則$x=i=\sqrt{-1}$，i就是一個虛數。

大家一定會想知道虛數是誰發明的，大多數的人認為虛數是由法國的數學家笛卡兒所命名的，我們現在所用的直角座標系統就是笛卡兒制定的，據說笛卡兒有一次要解以下的方程式
$x^2=x-5$

這個方程式可以變成$x^2-x+5=0$

它的解是$x=\frac{1\pm\sqrt{1-20}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-19}}{2}$

$\sqrt{-19}$是一個奇怪的數字，因為任何實數的平方都不會是負數。

笛卡兒認為負數開平方是無意義的，因此他將$\sqrt{-1}$命名為虛數，也未對這個數有興趣，而且他很看不起這個數。真正對虛數有極大興趣的是尤拉，他曾定義常用對數ｅ ，關於ｅ有一個著名的公式:

$e^{i\ x}=\cos x+i\ \ \sin x$

這個公式被稱為尤拉公式，如果我們令$x = \pi$帶入，因為$\cos\pi = -1$
$e^{i\ \pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$，因此

$e^{i\ \pi} + 1 = 0$

以上這個公式被稱為史上最美的公式，各位同學到大學以後就會了解尤拉公式的來龍去脈了。

現在我要來和大家談虛數的運算

$i = \sqrt{-1}$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = (i^2)i = (-1)i = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$
$i^5 = (i^4)i = i$
$i^6 = (i^4)i^2 = 1(-1) = -1$
$i^7 = (i^4)i^3 = 1(-i) = -i$
$i^8 = (i^4)(i^4) = 1(1) = 1$

因此 i 有一個循環的特性，因為

$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$

可以說，i 是以 i, -1, -i, 1 做一個循環的。

(1)$i^{10} = (i^8)i^2 = (i^4)^2 i^2 = (1)i^2 = -1$
$i^{22} = i^{20}i^2 = (i^4)^5 i^2 = i^2 = -1$
$i^{30} = i^{28}i^2 = (i^4)^7 i^2 = i^2 = -1$
$i^{16} = (i^4)^4 = 1^4 = 1$
$i^{101} = i^{100}i^1 = (i^4)^{25} i^1 = i^1 = i$
$i^{98} = i^{96}i^2 = (i^4)^{24} i^2 = i^2 = -1$

i^{-1}也很有趣，

$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

因此

$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{i}{-1} = -1$

$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = -i^{-1} = i$

$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$

$i^{-5} = (i^{-4})(i^{-1}) = -i$

$i^{-6} = (i^{-4})(i^{-2}) = i^{-2} = -1$

$i^{-7} = (i^{-4})(i^{-3}) = i$

$i^{-8} = (i^{-4})^2 = 1$

可以看出i^{-1}也有一個-i, -1, i, 1 的循環

(2)$i^{-9} = (i^8)i^2 = (i^{-4})^2 i^{-1} = i^{-1} = -i$

$i^{-13} = (i^{-4})^3 i^{-1} = i^{-1} = -i$

$i^{-23} = (i^{-4})^5 i^{-3} = i^{-3} = i$

$i^{-54} = (i^{-4})^{13} i^{-2} = i^{-2} = -1$

$i^{-102} = (i^{-4})^{25} i^{-2} = i^{-2} = -1$

$i^{-311} = (i^{-4})^{77} i^{-3} = i^{-3} = i$

$i^{-98} = (i^{-4})^{24} i^{-2} = i^{-2} = -1$

關於 i 還有一點該注意的地方，請看$\sqrt{-4}$。有了虛數的觀念，我們就知道

$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$

如果 a 是正數，則$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$

要注意的是，$\sqrt{-a}\ \sqrt{-b} = (\sqrt{a}i)(\sqrt{b}i) = \sqrt{ab}i^2 = -\sqrt{ab}$

以下的計算方法是錯的

$\sqrt{-a}\ \sqrt{-b} = \sqrt{(-a)(-b)} = \sqrt{ab}$

也就是說，$\sqrt{-a}\ \sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-b)}$

$\sqrt{-4} + \sqrt{-9} = \sqrt{4}i + \sqrt{9}i = 2i + 3i = 5i$

$\left(\sqrt{-4}\right)\left(\sqrt{-9}\right) = (2i)(3i) = 6i^2 = -6$

$\left(\sqrt{-4} + \sqrt{-9}\right)\left(\sqrt{-4} - \sqrt{-9}\right)$
$= (2i + 3i)(2i - 3i)$
$= i^2(2 + 3)(2 - 3)$
$= i^2(-5)$
$= (-1)(-5) = 5$