(54)期望值

如果我們玩一場遊戲，贏了可以賺一點錢，但是輸了要賠一些錢，我們當然希望知道，玩這場遊戲究竟會贏多少錢或是輸多少錢。

假設你和一位朋友下棋，你知道自己的棋藝高於那位朋友，贏的機率是$\frac{2}{3}$，輸的機率是$\frac{1}{3}$。贏一局，可以拿到 60 元，輸一局，要賠 60 元。我們可以算一下，你大概可以贏多少錢。

贏的機率是$\frac{2}{3}$，因此你有$\frac{2}{3}$的機率可以贏 60 元。但也有$\frac{1}{3}$的機率要賠 60 元，因此你期望可以得到的錢是$\frac{2}{3}\times 60-\frac{1}{3}\times 60=20$元。

假設一個事件的所有可能值是x_1、$x_2\cdots\cdots x_n$，而每一可能值的對應機率分別是p_1、$p_2\cdots\cdots p_n$。$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$，則此事件的期望值是$x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$。

(1)擲骰子取得 1,2,3,4 可以得到 10 元，取得 5,6 可以得到 20 元。求此遊戲的期望值。

取得 1,2,3,4 的機率是$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，取得 5,6 的機率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

因此，此題的期望值是$\frac{2}{3}\times 10+\frac{1}{3}\times 20=\frac{40}{3}$

(2)承上題，假如取得 1,2,3,4 須賠 5 元，求此遊戲的期望值。

此題的期望值是$\frac{4}{6}\times(-5)+\frac{2}{6}\times 20=\frac{-20+40}{6}=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$

(3)承上題，假設取得偶數可以得到 10 元，求期望值。

1~6 中的偶數是 2,4,6，得偶數的機率是$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

故此遊戲的期望值是$\frac{1}{2}\times 10=5$元

(4)擲骰子，兩次的點數和如等於 4，可得 120 元，求此遊戲的期望值。

點數和等於 4，只有 3 種可能(1, 3)，(2, 2)，(3, 1)

擲骰子兩次的可能情形有$6 \times 6 = 36$種

故點數和等於 4 的機率是$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$，期望值是$\frac{1}{12} \times 120 = 10$元

(5)擲骰子兩次，點數如相等，可得 60 元，求期望值。

點數相等的可能有 6 個(1, 1)，(2, 2)，(3, 3)，(4, 4)，(5, 5)，(6, 6)，機率是$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$，

期望值是$\frac{1}{6} \times 60 = 10$元

(6)丟銅板一次，如得到正面，可得 20 元，如得到反面，可得 10 元，求期望值。

正反的機率都是$\frac{1}{2}$，期望值是$\frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2} \times 10 = \frac{30}{2} = 15$元

(7)承上題，如得到反面，要賠 5 元，求期望值。

期望值是$\frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2} \times (-5) = \frac{15}{2} = 7.5$元

(8)丟銅板，規則如下:

兩正　20 元
一正一反　10 元
兩反　5 元

兩正的機率是$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

一正一反有兩種，故其機率是$2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

兩反的機率是$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

期望值是$\frac{1}{4}\times 20+\frac{1}{2}\times 10+\frac{1}{4}\times 5=\frac{20+20+5}{4}=\frac{45}{4}$元

(9)承上題，如果結果是兩反，要賠 10 元，則期望值是$\frac{1}{4}\times 20+\frac{1}{2}\times 10+\frac{1}{4}\times(-10)=\frac{20+20-10}{4}=\frac{30}{4}=7.5$元

(10)甲和乙下棋，勝者得 10 元，由敗者付。甲勝的機率是$\frac{2}{3}$，共下 2 盤，求甲得款的期望值。

下 2 盤棋，勝敗共有 4 種情形:

第一盤	第二盤	甲勝的機率	得款
甲勝	甲勝	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$	20
甲勝	乙勝	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$	10-10=0
乙勝	甲勝	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$	10-10=0
乙勝	乙勝	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	-20

甲得款的期望值是$\frac{4}{9}\times 20+\frac{1}{9}\times(-20)=\frac{60}{9}=\frac{20}{3}$元

(11)承上題，如甲勝的機率是$\frac{1}{3}$，求甲得款的期望值。

利用以上的討論，甲得款的期望值是$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 20+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}(-20)=20\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{9}\right)=-\frac{60}{9}=-\frac{20}{3}$

(12)甲乙二人擲骰子比大小，得點比對方大，可得 10 元，由對方付。如點數相等，則雙方都不出錢。今甲先擲，得 4 點，求甲得款的期望值。

乙如得 1,2,3 點，甲可得 10 元
乙如得 5,6 點，甲賠 10 元

故甲得款的期望值是$\frac{3}{6}\times 10-\frac{2}{6}\times 10=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$元

(13)承上題，如甲已得 6，求甲得款的期望值。

此題的期望值是$\frac{5}{6}\times 10=\frac{50}{6}=\frac{25}{3}$元

(14)承上題，如甲已得 2，求甲得款的期望值。

甲勝的唯一可能是乙得 1，機率是$\frac{1}{6}$，故甲得款的期望值是$\frac{1}{6}\times 10-\frac{4}{6}\times 10=\frac{-30}{6}=-5$元

(15)袋中有 3 黑球，4 白球，5 紅球，抽中黑球，可得 30 元，白球 20 元，紅球 10 元。求抽一球得款的期望值。

共有 3+4+5=12 球

期望值是$\frac{3}{12}\times 30+\frac{4}{12}\times 20+\frac{5}{12}\times 10=\frac{220}{12}=\frac{55}{3}$元

(16)某種彩券，其中獎及張數如下:

共發行 100 萬張

頭獎	40 萬元	1
一獎	30 萬元	2
二獎	20 萬元	5
三獎	10 萬元	10

求買一張彩券的期望值。

期望值是$4\times 10^5\times\frac{1}{10^6}+3\times 10^5\times\frac{2}{10^6}+2\times 10^5\times\frac{5}{10^6}+1\times 10^5\times\frac{10}{10^6}=$

$\frac{10^5(4+6+10+10)}{10^6}=\frac{10^5\times 30}{10^6}=\frac{30}{10}=3$元

(17)袋中有 1 元硬幣 6 枚,5 元硬幣 4 枚,10 元硬幣 2 枚,求任取一枚的期望值。

一共有 6+4+2=12 枚硬幣

期望值是$\frac{6}{12}\times 1+\frac{4}{12}\times 5+\frac{2}{12}\times 10=\frac{46}{12}=\frac{23}{6}$

(18)承上題，求任取兩枚的期望值。

任取兩枚共有以下 6 種情形:

2 枚 1 元，價值 2 元，機率$=\frac{C_2^6}{C_2^{12}}=\frac{15}{66}$

2 枚 5 元，價值 10 元，機率$=\frac{C_2^4}{C_2^{12}}=\frac{6}{66}$

2 枚 10 元，價值 20 元，機率$=\frac{C_2^2}{C_2^{12}}=\frac{1}{66}$

1 枚 1 元，1 枚 5 元，價值 6 元，機率$=\frac{C_1^6C_1^4}{C_2^{12}}=\frac{6\times 4}{66}=\frac{24}{66}$

1 枚 1 元，1 枚 10 元，價值 11 元，機率$=\frac{C_1^6C_1^2}{C_2^{12}}=\frac{6\times 2}{66}=\frac{12}{66}$

1 枚 5 元，1 枚 10 元，價值 15 元，機率$=\frac{C_1^4C_1^2}{C_2^{12}}=\frac{4\times 2}{66}=\frac{8}{66}$

期望值是$\frac{15}{66}\times 2+\frac{6}{66}\times 10+\frac{1}{66}\times 20+\frac{24}{66}\times 6+\frac{12}{66}\times 11+\frac{8}{66}\times 15=$

$\frac{30+60+20+144+132+120}{66}=\frac{506}{66}=\frac{23}{3}$

各位同學會發現，任取 1 枚的期望值是$\frac{23}{6}$，任取 2 枚的期望值是$\frac{23}{3}$，也就是說，任取 2 枚的期望值是任取 1 枚期望值的 2 倍。關於這一點,以後會有詳細的解釋。

(19)袋中有 2 張 100 元鈔票，3 張 x 元鈔票，任取 1 張的期望值是 70 元，求 x

共有 5 張鈔票

$$\frac{2}{5}\times 100+\frac{3}{5}x=70$$

$\frac{3}{5}x = 70 - 40$

$\frac{3}{5}x = 30$

$x = 50$

(20)袋中有 5 元硬幣 2 枚，x 元硬幣 1 枚，任取 1 枚的期望值是 6 元，求 x

$\frac{2}{3} \times 5 + \frac{1}{3}x = 6$

$\frac{1}{3}x = 6 - \frac{10}{3}$

$\frac{x}{3} = \frac{8}{3}$

$x = 8$

(21)保險公司的壽險保費是 2000 元，保額 20 萬元，年輕人一年內的存活率是 0.995，求保險公司的期望值。

保險公司的期望值是$2000 \times 0.995 - (20 \times 10^4 - 2000) \times (1 - 0.995) =$
$1990 - 19800 \times 0.005$
$= 1990 - 1.98 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3}$
$= 1990 - 9.9 \times 10^2$
$= 1990 - 990$
$= 1000$元

(22)袋中有 9 顆紅球和 3 顆白球，任取一球，求取出白球的期望值。

取出白球的期望值是$\frac{3}{12} \times 1 = \frac{1}{4}$

意思是如果取出 1 球，可能取出$\frac{1}{4}$顆白球。

(23)承上題，任取 3 球，求取出白球的期望值。

取出 3 球中有白球的可能性有 3 種:1 白球，2 白球，3 白球

1 白球的機率是$\frac{C_2^9 C_1^3}{C_3^{12}}$

2 白球的機率是$\frac{C_1^9 C_2^3}{C_3^{12}}$

3 白球的機率是$\frac{C_3^3}{C_3^{12}}$

$$C_3^{12} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = \frac{1320}{6} = 220$$

∴ 取出白球的期望值是$\frac{C_2^9 C_1^3}{C_3^{12}} \times 1 + \frac{C_1^9 C_2^3}{C_3^{12}} \times 2 + \frac{C_3^3}{C_3^{12}} \times 3$

$$= \frac{\frac{9 \times 8}{2} \times 3}{220} \times 1 + \frac{9 \times \frac{3 \times 2}{2}}{220} \times 2 + \frac{1}{220} \times 3$$

$= \frac{108+54+3}{220} = \frac{165}{220} = \frac{3}{4}$

請同學們注意，取 1 球是白球的期望值是$\frac{1}{4}$，取 3 球中有白球的期望值是$\frac{3}{4}$，正好是 3 倍。我們以後會解釋的。

(24)袋中有 3 白球，2 黑球，任取 1 球，求取出白球的期望值。

共有 3+2=5 球

取出白球的期望值是$\frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$

(25)承上題，任取 2 球，求取出白球的期望值。

取出 2 球中有白球的可能性有 2 種:1 白球，2 白球

1 白球的機率是$\frac{C_1^3 C_1^2}{C_2^5} = \frac{3 \times 2}{\frac{5 \times 4}{2 \times 1}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

2 白球的機率是$\frac{C_2^3}{C_2^5} = \frac{\frac{3 \times 2}{2 \times 1}}{\frac{5 \times 4}{2 \times 1}} = \frac{3}{10}$

∴ 取 2 球中有白球的期望值是$\frac{3}{5}\times 1+\frac{3}{10}\times 2=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$

同學請注意，取 2 球中有白球的期望值是取 1 球中有白球期望值的 2 倍。

(26)承上題，任取 3 球，求取出白球的期望值。

取出 3 球中有白球的可能性有 3 種:1 白球，2 白球，3 白球

1 白球的機率是$\frac{C_1^3C_2^2}{C_3^5}=\frac{3\times 1}{\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}}=\frac{3}{10}$

2 白球的機率是$\frac{C_2^3C_1^2}{C_3^5}=\frac{\frac{3\times 2}{2\times 1}\times 2}{\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}}=\frac{6}{10}$

3 白球的機率是$\frac{C_3^3}{C_3^5}=\frac{1}{\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}}=\frac{1}{10}$

此題的期望值是$\frac{3}{10}\times 1+\frac{6}{10}\times 2+\frac{1}{10}\times 3=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$

由以上 3 題可以看出，任取一球含白球的期望值是$\frac{3}{5}$，任取 2 球含白球的期望值是$\frac{6}{5}$，任取 3 球含白球的期望值是$\frac{9}{5}$。取 2 球含白球的期望值是取 1 球含白球期望值的 2 倍，取 3 球含白球的期望值是取 1 球含白球期望值的 3 倍。

這種現象在(17)和(18)題中也出現過。1 元硬幣 6 枚，5 元硬幣 4 枚，10 元硬幣 2 枚，任取 1 枚的期望值是$\frac{23}{6}$，任取 2 枚的期望值是$\frac{23}{3}$，可見得任取 2 枚的期望值是任取 1 枚期望值的 2 倍。

有些人的解釋如下:期望值相當於平均值。比方說，我們有 3 枚 5 元硬幣和 2 枚 10 元硬幣，任取 1 枚的期望值是$\frac{3}{5}\times 5+\frac{2}{5}\times 10=\frac{35}{5}=7$元

我們也可以用平均的觀念，全部硬幣的總價是$3\times 5+2\times 10=35$，一共有 5 枚硬幣，因此一枚硬幣的平均價值是$\frac{35}{5}=7$元。所以期望值等於平均值。

根據這種想法，很多人認為取 2 枚硬幣的期望值當然會是任取 1 枚硬幣期望值的 2 倍。但是這種想法是不對的，因為當我們任取 2 枚硬幣，第一次取出的硬幣並未放回，因此第二次取幣時的平均值不同於第一次取幣時的平均值。

要證明我們可以用簡單的想法來解進階的問題，需要比較高深的數學，高中生到大學以後才搞懂吧。

現在我們想一個問題，假設袋子中有 3 白球和 2 黑球，甲乙兩人依序取球，甲先取，取出白球的機率是$\frac{3}{5}$，乙後取，乙取出白球的機率是多少？

乙取球時有兩種可能的情形:

(1)甲取走了 1 顆白球，因此乙取得白球的機率是$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$

(2)甲取出 1 黑球，乙取得白球的機率是$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$

因此乙取得白球的機率是$\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

各位同學可以看出，雖然乙後取球，他取得白球的機率和甲先取球的機率是一樣的。

我們不妨用數學來證明這一點。假設有 x 個 A 物件和 y 個 B 物件，甲乙依序取件，甲拿到 A 物件的機率是$\frac{x}{x+y}$，取得 B 物件的機率是$\frac{y}{x+y}$。

乙取件有兩種可能:

(1)甲取走 A 物件，乙取走 A 物件的機率是$(\frac{x}{x+y})(\frac{x-1}{x+y-1})$

(2)甲取走 B 物件，乙取走 A 物件的機率是$(\frac{y}{x+y})(\frac{x}{x+y-1})$

因此乙取走 A 物件的機率是$\frac{x(x-1)}{(x+y)(x+y-1)}+\frac{xy}{(x+y)(x+y-1)}=\frac{x^2-x+xy}{(x+y)(x+y-1)}=$

$\frac{x(x+y-1)}{(x+y)(x+y-1)}=\frac{x}{x+y}$

各位同學可以發現，雖然甲先取件，他拿到 A 物件和乙拿到 A 物件的機率是一樣的。

袋中有白球和黑球，第一次拿球時，可能拿到白球，也可能拿到黑球。甲拿白球有一個機率，乙在甲後面拿，他拿到白球的機率和甲拿到白球的機率是一樣的。其原因是甲可能沒有拿走白球。

各位同學不妨去看我寫的有關機率的講義(第 50~53 章)。假設有 5 張紙，其中只有 2 張是獎券，甲乙依序抽獎，甲先抽，得獎的機率和乙後抽得獎的機率是一樣的。

我們通常會以為甲先抽應該比較划得來，其實並非如此。因此有人為了簡化討論起見，可以假想甲抽了獎以後又放回去了。雖然結果是對的，但甲並未將獎放回去。

因此，我建議同學不要便宜行事，用平均值的想法來做期望值的問題。為了強化同學的印象起見，我再舉一個例子來說明。

(27)有 3 枚 5 元銅幣，2 枚 10 元銅幣，求任取 1 枚的期望值和任取 2 枚的期望值。

方法(1)用平均值的想法

$$平均值=\frac{3\times5+2\times10}{3+2}=\frac{15+20}{5}=\frac{35}{5}=7$$

所以任取 1 枚的期望值是 7 元，任取 2 枚的期望值是$7\times2=14$元。

答案是正確的，但是並沒有很嚴謹的證明說這種做法是正確的。

方法(2)用期望值的定義

$$任取\ 1\ 枚的期望值=\frac{3}{5}\times5+\frac{2}{5}\times10=3+4=7$$

任取 2 枚有 3 種可能:

2 枚 5 元，機率是$\frac{C_2^3}{C_2^5}=\frac{3}{10}$，得款 10 元

2 枚 10 元，機率是$\frac{C_2^2}{C_2^5}=\frac{1}{10}$，得款 20 元

1 枚 5 元和 1 枚 10 元，機率是$\frac{C_1^3C_1^2}{C_2^5}=\frac{6}{10}$，得款 15 元

任取 2 枚的期望值是$\frac{3}{10}\times 10+\frac{1}{10}\times 20+\frac{6}{10}\times 15=\frac{30+20+90}{10}=\frac{140}{10}=14$

同學們也許覺得這樣計算太難，但是同學們一定要學會這種方法，因為這種方法可以幫助你們邏輯思考的能力。

(28)有 2 顆球和 2 個桶子，將球任意丟入桶中，求空桶個數的期望值。

每一球有 2 種投法，共有$2^2=4$種可能。不可能有 2 個空桶，最多只可能有 1 個空桶。兩個桶子中任何一個都有可能是空桶，所以空桶個數的期望值是

$$\frac{C_1^2}{2^2}\times 1=\frac{2}{4}\times 1=\frac{1}{2}$$

(29)有 2 顆球和 3 個桶子，將球任意丟入桶中，求空桶的期望值。

每一球投球入桶有 3 種投法，共有$3^2=9$種可能。

1 個空桶的機率是$\frac{C_1^3}{3^2}\times 2=\frac{6}{9}$，因為 3 個桶子每一個都有可能是空桶，$C_1^3$是要這一個桶子是空桶。

其他兩個桶子，要每個桶子都放入 1 球，有 2 種放法。

1 個空桶的機率是$\frac{C_1^3}{3^2}\times 2=\frac{6}{9}$

2 個空桶的機率是$\frac{C_1^3}{3^2}=\frac{3}{9}$

故空桶的期望值是$\frac{6}{9}+\frac{3}{9}\times 2=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$

(30)甲乙二人比賽，3 戰 2 勝者可得 100 元。甲勝的機率是$\frac{2}{3}$，甲已勝 1 局，求甲得款的期望值。

甲已勝 1 局，在未來的 2 局中，如能勝 1 局，就可得 100 元。甲敗的機率是$\frac{1}{3}$，

連敗 2 局的機率是$(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$。因此甲至少勝 1 局的機率是$1-(\frac{1}{3})^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$，故

甲得款的期望值是$(1-\left(1-\frac{2}{3}\right)^2)\times 100=\frac{8}{9}\times 100=\frac{800}{9}\cong 88.9$元

(31)承上題，如甲勝的機率是$\frac{4}{7}$，甲已勝 1 局，求甲得款的期望值。

此題的期望值是$(1-\left(1-\frac{4}{7}\right)^2)\times 100=(1-\frac{9}{49})\times 100=\frac{40}{49}\times 100=\frac{4000}{49}\cong 81.6$元

(32)承上題，如甲勝的機率是$\frac{1}{2}$，甲已勝 1 局，求甲得款的期望值。

此題的期望值是$(1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^2)\times 100=\frac{3}{4}\times 100=75$元

(33)5 戰 3 勝，甲勝的機率是 0.6，甲已勝 2 局，勝者可得 100 元，求甲得款的期望值。

甲得款的期望值$(1-(1-0.6)^3)\times 100=(1-(0.4)^3)\times 100=(1-0.064)\times 100=0.936\times 100=93.6$元

(34)丟銅板 3 次，3 次正面 20 元，2 次正面 10 元，1 次正面 5 元，求期望值。

丟銅板，共有$2^3=8$種可能。

出現 3 次正面的機率是$\frac{C_3^3}{2^3}=\frac{1}{8}$

出現 2 次正面的機率是$\frac{C_1^3}{2^3}=\frac{3}{8}$(一次反面)

出現 1 次正面的機率是$\frac{C_2^3}{2^3}=\frac{3}{8}$(二次反面)

故期望值是$\frac{1}{8}\times 20+\frac{3}{8}\times 10+\frac{3}{8}\times 5=\frac{20+30+15}{8}=\frac{65}{8}$

(35)學生抽獎得 500 元，主辦單位給 3 個信封，1 個信封內有 800 元，2 個信封內各有 200 元，值不值得換?

換信封的期望值是$\frac{1}{3}\times 800+\frac{2}{3}\times 200=\frac{1200}{3}=400$元

400＜500，不值得換。

(36)承上題，如 2 個信封內各有 400 元，值不值得換?

換信封的期望值是$\frac{1}{3} \times 800 + \frac{2}{3} \times 400 = \frac{1600}{3} = 533.3$元

533＞500
∴ 值得換。

(37)選擇題 1, 2, 3, 4，答對 4 分，答錯扣 1 分，求得分的期望值。

$$\frac{1}{4} \times 4 - \frac{3}{4} \times 1 = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$$

(38)承上題，如已知某一答案是錯的，求得分的期望值。

$$\frac{1}{3} \times 4 - \frac{2}{3} \times 1 = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$$

(39)丟銅板 2 次，如得 k 次正面，可得k^2元，求期望值。

k=1，機率是$\frac{C_1^2}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

k=2，機率是$\frac{C_2^2}{2^2} = \frac{1}{4}$

期望值是$\frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{4} \times 2^2 = \frac{1}{2} + 1 = 1.5$

(40)丟銅板 2 次，如得 k 次正面，可得3^k元，求得款期望值。

期望值是$\frac{1}{2} \times 3^1 + \frac{1}{4} \times 3^2 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$元

(41)甲乙二人比賽，每勝 1 局，由敗方給勝方 150 元。比賽 2 局，甲得款的期望值是 100 元，求甲得勝的機率。

令甲得勝的機率為 x，如甲乙各勝 1 局，則甲得款是 0，如甲連勝 2 局，得款 300 元，如甲連敗 2 局，則賠 300 元。

甲連勝 2 局的機率是x^2，連輸 2 局的機率是$(1-x)^2$
甲得款的期望值是$x^2 \times 300-(1-x)^2 \times 300=100$
$(-1+2x) \times 300=100$
$-300+600x=100$
$600x=400$
$x=\frac{400}{600}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(42)袋中有白球和黑球，共 5 球。任意取 1 球，取得白球可得 100 元，取得黑球可得 200 元。已知取 1 球得款的期望值是 160 元，求白球和黑球的數目。

令白球的數目為 x，黑球的數目為 y

x+y=5………(1)
$\frac{x}{5} \times 100+\frac{y}{5} \times 200=160 \cdots \cdots \cdots (2)$

由(2)得 20x+40y=160，x+2y=8………(3)

解(1)和(3)，y=3，x=2

答:袋中有 2 白球和 3 黑球。

(43)丟銅板，2 正得款 100 元，1 正 1 反 50 元。此遊戲的得款期望值是 55 元，求 2 反的得款多少元?

令 2 反得款 x 元

2 正的機率=2 反的機率=$\frac{1}{4}$

1 正 1 反的機率=$\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{4} \times 100+\frac{1}{2} \times 50+\frac{1}{4}x=55$

$25+25+\frac{1}{4}x=55$

$\frac{1}{4}x=5$

$x = 20$

(44)袋中有 6 張 10 元鈔票，4 張 x 元鈔票，任取 1 張鈔票的期望值是 8 元，求 x

共有 6+4=10 張鈔票

$$\frac{6}{10} \times 10 + \frac{4}{10}x = 8$$

$$\frac{60 + 4x}{10} = 8$$

$$60 + 4x = 80$$

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

(45)擲骰子 2 次，2 次點數相等可以得獎金，獎金的期望值是 100 元，求獎金是多少元?

擲骰子 2 次，共有 36 種可能情形，2 次點數相等有 6 種可能。
令獎金數為 x

$$\frac{6x}{36} = 100$$

$$x = 600\text{元}$$

(46)袋中有 2 黑球，5 白球以及其他 n 個球。取出黑球可得 2000 元，取出白球可得 1000 元。期望值是 300 元，問其他球的數目 n 是多少?

$$\frac{2}{2 + 5 + n} \times 2000 + \frac{5}{2 + 5 + n} \times 1000 = 300$$

$$\frac{9000}{7 + n} = 300$$

$$300(7 + n) = 9000$$

$$7 + n = 30$$

$$n = 23$$

(47)丟一個有瑕疵的銅板，得正面，可得 100 元，得反面，可得 40 元。期望值是 80 元，求得正面的機率。

令得正面的機率為 x，則得反面的機率是 1-x

$$100x + 40(1 - x) = 80$$
$$60x + 40 = 80$$
$$60x = 40$$
$$x = \frac{40}{60} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$