

(53) 機率-4 總複習

(1) 有5顆梨子和4顆桃子，任取1顆是梨子的機率是多少？

答案： $\frac{5}{9}$

(2) 承上題，是桃子的機率是多少？

答案： $\frac{4}{9}$

(3) 15顆黑球，10顆白球和5顆黃球，任取一顆是黑球的機率是多少？

答案： $\frac{15}{15+10+5} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

(4) 承上題，不是黑球的機率是多少？

答案： $\frac{1}{2}$

有兩種方法：

(a) 在上題的答案中，可知黑球的機率是 $\frac{1}{2}$ ，因此不是黑球的機率是 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 。

(b) 不是黑球，則必定是白球或黃球，因此機率是 $\frac{10+5}{15+10+5} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ 。

(5) 丟銅板6次，6次都是正面的機率是多少？

答案： $\frac{1}{64}$

每次丟，結果都是正面，只有一種情形：(正、正、正、正、正、正)，因為每次丟，都有兩種可能，因此只有 $2^6 = 64$ 種可能，因此機率是 $\frac{1}{64}$ 。

(6) 承上題，每次結果都相同的機率是多少？

答案： $\frac{1}{32}$

每次丟，結果都相同，有兩種可能：

(正、正、正、正、正、正)和(反、反、反、反、反、反)

因此，此題的機率是 $\frac{2}{64} = \frac{1}{32}$ 。

(7)擲骰子兩次，已知兩次結果之和等於5，求第一次的結果小於3的機率。

答案： $\frac{1}{2}$

A：第一次的結果小於3的事件。

B：兩次結果的和等於5的事件。

B：(1,4)、(2,3)、(3,2)、(4,1)， $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

其中第一次結果小於3的只有(1,4)、(2,3)。

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{2}$$

另一個方法：

B只有4個事件，其中2個符合A的條件，因此 $P(A/B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。

(8)承上題，求 $P(B/A)$ 。

答案： $\frac{1}{6}$

擲骰子會有6種結果，其中2個小於3，因此 $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

從上題，得知 $P(A \cap B) = \frac{1}{18}$ 。

$$\therefore P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

另一個方法：

兩次擲骰子，第一次出1或2的情況有12種：

(1,1)、(1,2)、(1,3)、(1,4)、(1,5)、(1,6)

(2,1)、(2,2)、(2,3)、(2,4)、(2,5)、(2,6)

其中只有(1,4)、(2,3)合乎B的條件，因此 $P(B/A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

(9)5個白球，3個黑球，2個紅球，連續3次拿球出來，求每次都不一樣的機率。

答案：

假設球拿出的次序是白、黑、紅，此機率是 $\frac{5}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ 。

假設球拿出的次序是紅、白、黑，此機率是 $\frac{2}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{24}$ 。

因此可以發現，不論次序為何，機率都是 $\frac{1}{24}$ ，次序的排列有 $3! = 6$ 種，因此每次都

不一樣的機率是 $3! \times \frac{1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ 。

(10) 5個白球，4個黑球，3個紅球，連續3次拿球出來，求每次取得同樣顏色球的機率。

答案： $\frac{3}{44}$

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{12} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{60+24+6}{1320} = \frac{90}{1320} = \frac{3}{44}$$

(11) 假設A和B是互相獨立的事件， $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ ，求P(B)

答案： $\frac{1}{4}$

因為A和B是獨立事件，故 $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{3}P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B)$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{3}P(B)$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

(12) 承上題，求 $P(B/A)$

答案： $\frac{1}{3}$

因為A和B是獨立的，因此 $P(B/A) = P(B) = \frac{1}{3}$

(13) 承上題，求 $P(A \cap B)$

答案： $\frac{1}{6}$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(14) 3種飛彈擊中飛機的機率是0.6、0.8、0.7，求3枚飛彈都未擊中飛機的機率。

答案：0.024

$$\begin{aligned} \text{3枚都未擊中的機率} &= (1 - 0.6) \times (1 - 0.8) \times (1 - 0.7) \\ &= 0.4 \times 0.2 \times 0.3 \\ &= 0.024 \end{aligned}$$

(15) 承上題，求至少一枚擊中的機率。

答案：0.976

$$\text{此機率是 } 1 - 0.024 = 0.976$$

(16) 承上題，求只中一枚飛彈的機率。

答案：0.188

$$\begin{aligned} \text{此機率} &= 0.6 \times (1 - 0.8) \times (1 - 0.7) + (1 - 0.6) \times 0.8 \times (1 - 0.7) + \\ &\quad (1 - 0.6) \times (1 - 0.8) \times 0.7 \\ &= 0.6 \times 0.2 \times 0.3 + 0.4 \times 0.8 \times 0.3 + 0.4 \times 0.2 \times 0.7 \\ &= 0.036 + 0.096 + 0.056 \\ &= 0.188 \end{aligned}$$

(17) 承上題，已知飛機只中一彈，求此彈是乙飛彈的機率。

答案： $\frac{24}{47}$

$$\text{此機率} \frac{0.4 \times 0.8 \times 0.3}{0.188} = \frac{0.096}{0.188} = \frac{24}{47}$$

(18) 將a、b、c、d、e排列，求a、b排在開始位置的機率。

答案： $\frac{1}{10}$

a、b如排在最前面，則只需排列後面的3個英文字母，這有3!種排法，

a、b的排法有 $2!$ 種，原來共有 $5!$ 種排列方法，

故a、b排在最前面的機率是 $\frac{2!3!}{5!} = \frac{2!}{5 \times 4} = \frac{1}{10}$ 。

(19)承上題，求a、b排列在一起的機率。

答案： $\frac{2}{5}$

將ab視為一個物件，它本身的排列有 $2!$ 種，因為ab被視為一個物件，

共有4個物件，排法有 $2!4!$ 種，原來的排法有 $5!$ 種，故此題的機率為 $\frac{2!4!}{5!} = \frac{2}{5}$ 。

(20)有2、1、3、3四個數字，求此四個數字排成一個4位數，而千位數是2的機率是多少？

答案： $\frac{1}{4}$

千位數是2，剩下1、3、3的排列，排列的種類有 $\frac{3!}{2!}$ 個，所有排列方法有 $\frac{4!}{2!}$ 種，

故此題的機率是 $\frac{\frac{3!}{2!}}{\frac{4!}{2!}} = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$ 。

(21)承上題，求千位數是3的機率。

答案： $\frac{3!}{\frac{4!}{2!}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(22)求數字0、0、3、5、6組成5位數的機率。

答案： $\frac{3}{5}$

5位數的萬位數不能是0，因此先求萬位數是0的機率，如果萬位數是0，剩下4個數的排列方法有 $4!$ 個，所有排列方法是 $\frac{5!}{2!}$ 個，故萬位數是0的排列方法，

有 $\frac{4!}{\frac{5!}{2!}} = \frac{4!2!}{5!} = \frac{2}{5}$ ，但萬位數不可是0，故此題的機率是 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ 。

(23)飛彈擊中飛機的機率是0.6，求要打幾枚飛彈才能使飛機中彈機率超過0.9？

答案：3枚

$$1 - (1 - 0.6)^n > 0.9$$

$$(0.4)^n < 0.1$$

$$n = 3$$

(24) 已知 $P(A)$ 和 $P(B)$ ，假設 A 和 B 是互相獨立的，則 $P(A \cap B)$ 是多少？

答案： $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(25) 承上題，假設 A 和 B 互斥，求 $P(A \cap B)$ 的機率。

答案： $P(A \cap B) = 0$

(26) 承上題，如 A 和 B 互斥，求 $P(A \cup B)$ 的機率。

答案： $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

(27) 甲儀器故障率是0.2，乙儀器故障率是0.3，求兩儀器中至少一個工作正常的機率。

答案：0.94

A ：甲儀器故障的事件。

B ：乙儀器故障的事件。

$$P(A)P(B) = 0.2 \times 0.3 = 0.06$$

$$1 - P(A)P(B) = 1 - 0.06 = 0.94$$

因此，至少一架儀器工作正常的機率是0.94。

另一個方法：

令 A ：甲儀器正常的事件。

B ：乙儀器正常的事件。

$$P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(B) = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.56$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.7 - 0.56 = 0.94$$

(28) 甲袋中有5顆梨子、2顆桃子，乙袋中有3顆梨子、3顆桃子，從甲袋中拿一水果放入乙袋中拿出一水果，求此水果是梨子的機率。

答案： $\frac{26}{49}$

A ：從甲袋中拿出的是梨子。

B ：從乙袋中拿出的是梨子。

$$P(A) = \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7}$$

$$P(B/A) = \frac{3+1}{3+1+3} = \frac{4}{7}$$

$$\therefore P(B \cap A) = P(A)P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{49}$$

\bar{A} ：從甲袋中拿出的不是桃子，是梨子。

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7}$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{3}{3+3+1} = \frac{3}{7}$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(\bar{A})P(B/\bar{A}) = \frac{2}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{49}$$

$$\therefore P(B) = P(B/A) + P(B/\bar{A}) = \frac{20}{49} + \frac{6}{49} = \frac{26}{49}$$

從乙袋中拿出的是梨子的機率是 $\frac{26}{49}$ 。

(29)承上題，求從乙袋中拿出桃子的機率。

答案： $\frac{23}{49}$

此題的機率是 $\frac{2}{7} \times \frac{4}{7} + \frac{5}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{8+15}{49} = \frac{23}{49}$ 。

從上面的兩題，可知從乙袋中拿出梨子的機率是 $\frac{26}{49}$ ，

從乙袋中拿出桃子的機率是 $\frac{23}{49}$ ， $\frac{26}{49} + \frac{23}{49} = 1$ ，故知答案是正確的。

(30)有5黑球、3白球，拿兩次，求兩次都是黑球的機率。

答案： $\frac{5}{5+3} \times \frac{5-1}{5+3-1} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

(31)承上題，都是白球的機率。

答案： $\frac{3}{5+3} \times \frac{3-1}{5+3-1} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$