(52)機率-3 條件機率

條件機率是很容易懂的，但是同學們一定要知道其中的道理，不可死背公式。死背公式是沒有用的。

我們先舉一個例子，一個家庭有兩個孩子，孩子可以是男或女，因此一共有下列 4 種可能:
(1)一男一女
(2)一女一男
(3)兩男
(4)兩女

每種可能的機率都是$\frac{1}{4}$。

假如我們已知家庭中有一男，這個家庭有一男一女的機率是多少呢?我們知道這個機率一定比$\frac{1}{4}$要大，因為這個家庭不可能有兩女的，可能的情形減少到了以下 3 種:
(1)兩男
(2)一男一女
(3)一女一男

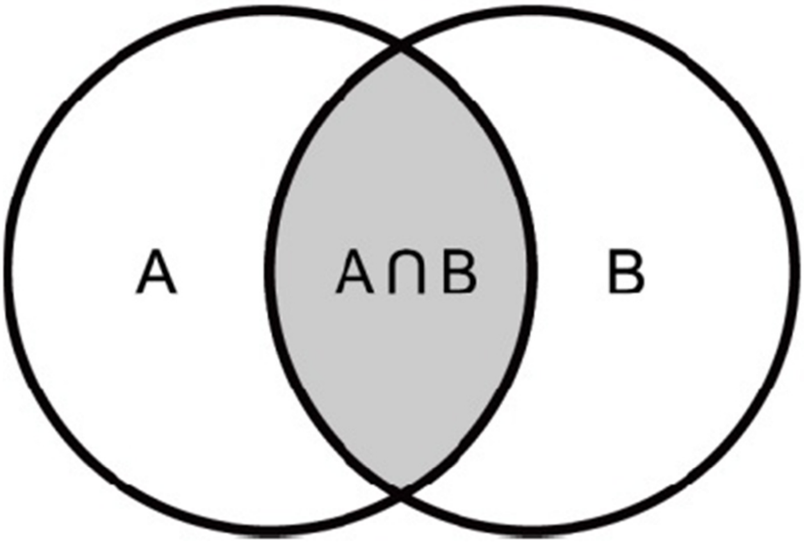
所以一旦我們知道了已有一個男生，兩男的機率就增加到了$\frac{1}{3}$。

一男一女原來的機率是$\frac{1}{4}$，現在變成了$\frac{1}{3}$，這是因為現在有了一個新的條件:已知家中已有一男孩。

要學條件機率，同學們必須先學一些新的名詞，我們可以用以下的例子來解釋。

假設 A=(1,2,3,4)
　　B=(3,4,5,6,7,8)

以上的數字可以表示物件或事件，我們首先可以觀察到 A 和 B 共有 3 和 4，我們因此說(3,4)是 A 和 B 的交集。在數學上，我們用 A∩B 表示。以這個例子而言，A∩B=(3,4)。我們也可以用圖來表示:



大家一定會問 A 和 B 一共有哪些物件，我們知道 A 和 B 中所有的物件是(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)。我們將這些物件稱之為 A 和 B 的聯集，在數學上，A 和 B 的聯集用 A∪B 來表示，以這個例子而言，A∪B=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)。

根據以上的討論，我們可以利用以下的公式:

A∪B=A+B－A∩B

以這個例子來說，

A+B－A∩B=(1, 2, 3, 4)+(3, 4, 5, 6, 7, 8)－(3, 4)=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

我們可以看看機率，我們知道 A∪B 中有 8 個物件，因為 A=(1, 2, 3, 4)，所以 P(A)=$\frac{4}{8}$。

B=(3, 4, 5, 6, 7, 8)，所以 P(B)=$\frac{6}{8}$。

A∩B=(3, 4)

∴P(A∩B)=$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

A∪B=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

P(A∪B)=$\frac{8}{8}=1$

我們也可以利用 P(A∪B)=P(A)+P(B)－P(A∩B)

P(A∪B)=P(A)+P(B)－P(A∩B)=$\frac{4}{8}+\frac{6}{8}-\frac{2}{8}=\frac{8}{8}=1$

假設我們從 A 中取一物件，這個物件也屬於 B 的機率是多少?

因為 A=(1, 2, 3, 4)，A∩B=(3, 4)

所以 A 內物件也屬於 B 的機率是$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。

同理，因為B=(3, 4, 5, 6, 7, 8)，A∩B=(3, 4)，所以B內物件也屬於A的機率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$。

我們將「在 A 事件發生的條件下，B 事件也發生」的機率，稱為條件機率。在數學上，我們以 P(B/A)來表示。

以以上的例子而言，已知物件來自 A，但又屬於 B 的機率是 P(B/A)，P(B/A)=$\frac{1}{2}$。

已知物件來自 B，但又屬於 A 的機率是 P(A/B)，P(A/B)=$\frac{1}{3}$。

從以上的討論，我們可知

P(B/A)=$\frac{A\cap B\text{發生的機率}}{\text{A 發生的機率}}=\frac{P(A\cap B)}{\mathrm{P(A)}}$

以我們的例子而言，

P(A)=$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

P(A∩B)=$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

∴ P(B/A)=$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

同理，P(A/B)=$\frac{P(A\cap B)}{\mathrm{P(B)}}=\frac{\frac{2}{8}}{\frac{6}{8}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$。

P(B/A)= $\frac{P(A\cap B)}{\mathrm{P(A)}}$是一個著名的數學定理，由英國牧師貝斯(R.T. Bayes, 1702-1761)發明的，也因此被稱為貝氏定理。同學不可死背貝氏定理的公式，而應該了解它的意義。

在看以後的例子之前，請先看下面這一段:

(1)A 和 B 事件互斥，則 $P(A\cap B)=0$

如　A:擲骰子，結果是 1
　　B:擲骰子，結果是 2

可以看出，A 和 B 是互斥事件，因此 $P(A\cap B)=0$。

$P(A)=\frac{1}{6}$

$P(B)=\frac{1}{6}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-0=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

假如　A:擲骰子，結果是 1
　　　B:擲骰子，結果不是 1

此時　$B=(2,3,4,5,6)$

因此　$P(A)=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{5}{6}$，$P(A\cap B)=0$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}-0=1$

同學們不妨記得，如 A 和 B 互斥，則 $P(A\cap B)=0$，$P(A\cup B)=1$。

(2)A 和 B 獨立，則 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

如　A:第一次擲骰子，結果是 1
　　B:第二次擲骰子，結果是 1

第一次擲骰子的結果不會影響第二次擲骰子的結果，因此 A 和 B 是互相獨立的。

此時　$P(A)=\frac{1}{6}$

　　　$P(B)=\frac{1}{6}$

$P(A\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

∴ 意思是連續兩次都是 1 的結果是$\frac{1}{36}$。

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{6+6-1}{36}=\frac{11}{36}$

意思是兩次中，至少有一次結果是 1 的機率是$\frac{11}{36}$。

(3)A 和 B 互相有關，則 $P(A \cap B)=P(A)P(B/A)$

袋中有 5 顆黑球和 2 顆白球，兩次從袋中取球，問兩次都是取出黑球的機率。

A:第一次取出黑球
B:第二次又取出黑球

$P(A)=\frac{5}{5+2}=\frac{5}{7}$

因為第一次取出了 1 顆黑球，因此袋中只剩 4 顆黑球和 2 顆白球，所以

$P(B/A)=\frac{4}{4+2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$。

$P(A \cap B)=P(A)P(B/A)=\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{21}$

所以，同學們在做題目時，必須先搞清楚事件是互斥、獨立或是互相有關的。

1. 一個家庭中有 2 個小孩，已知有 1 個男孩，這個家庭有 2 男的機率是多少?

   因為這個家庭中有 2 個小孩，共有(男，男)、(男，女)、(女，男)、(女，女)四種情況。

   令 A 表示有 1 男孩的事件，A=(男，男)、(男，女)、(女，男)
   令 B 表示有 2 男孩的事件，B=(男，男)

   $P(A \cap B)$=(男，男)

   $P(A)=\frac{3}{4}$

   $P(A \cap B)=\frac{1}{4}$

   $\therefore P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$

以上的答案是根據貝氏定理得到的，我們也可以用以下的方式來想:
因為已有 1 男孩，所以這個家庭有 3 種可能:(男，男)、(男，女)、(女，男)

因此有(男，男)的機率是$\frac{1}{3}$。

2. 一班有 40 位學生，30 人喜歡打籃球，20 人喜歡打排球，10 人兩者都喜歡。已知 1 位學生喜歡打籃球，他也喜歡打排球的機率是多少?

令 A=喜歡打籃球事件
令 B=喜歡打排球事件

P(A)=$\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$

P(B)=$\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

有 10 人兩者都喜歡，故 P(A∩B)=$\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$。

∴ P(B/A)= $\frac{P(A\cap B)}{\mathrm{P(A)}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$

∴這個學生也喜歡打排球的機率是$\frac{1}{3}$。

同學們必須知道貝氏定理背後的意義，我們已知這個學生喜歡打籃球，因此他一定是 30 位學生中的一位，但是這 30 位學生中，又有 10 位學生兩種球類都喜歡，所以這位學生兩者都喜歡的機率是$\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$。

3. 承上題，已知 1 位同學喜歡打排球，他也喜歡打籃球的機率是多少?

P(A/B)= $\frac{P(A\cap B)}{\mathrm{P(B)}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

4. 12 人中，10 人喜歡吃蘋果，5 人喜歡吃梨子，3 人兩者都喜歡。已知某人喜歡吃梨子，求他也喜歡吃蘋果的機率。

A:喜歡吃蘋果的事件
B:喜歡吃梨子的事件

P(A)=$\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

$P(B)=\frac{5}{12}$

$P(A\cap B)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{1}{4}\times\frac{12}{5}=\frac{3}{5}$

此人也喜歡吃蘋果的機率是$\frac{3}{5}$。

也可以如此想，5位愛吃梨子，3人兩者都愛，因此答案是$\frac{3}{5}$。

5. 擲骰子，已知結果是偶數，求結果小於5的機率。

A:結果是偶數的事件，A=(2,4,6)
B:結果小於5的事件，B=(1,2,3,4)
$A\cap B$=(2,4)

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

也可以如此想，(2,4,6)中，只有2和4是小於5的，因此此題的機率是$\frac{2}{3}$。

6. 承上題，已知結果小於5，求是偶數的機率。

$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$

同學們如果懂得機率，可以不用公式，也可求得正確的答案。已知結果小於5，因此有4種可能:(1,2,3,4)，其中(2,4)是偶數，因此答案是$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。

7. 袋中有10個白色彈珠，5個黃色彈珠，10個黑色彈珠。已知拿出的不是黑

色，求此彈珠是黃色的機率。

A:彈珠是黃色的
B:彈珠不是黑色的

P(A)=$\frac{5}{10+5+10}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$

P(B)=$\frac{10+5}{10+5+10}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$

P(A∩B)=$\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$

∴ P(A/B)= $\frac{P(A\cap B)}{\mathrm{P(B)}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{3}}=\frac{1}{3}$

這題也可以用一般機率的想法求得，已知彈珠不是黑色的，因此一定是 10 個白色和 5 個黃色中的一個，所以黃彈珠的機率是$\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$。

8. 選英文和法文的機率相等，選英文有$\frac{2}{3}$的機率可得 90 分，選法文有$\frac{1}{2}$的機率可得 90 分。求選法文得 90 分的機率。

A: 選法文的事件
B: 得 90 分的事件

P(A)=$\frac{1}{2}$

P(B/A)=$\frac{1}{2}$

∴ P(B∩A)=P(A)P(B/A)=$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

選法文得 90 分的機率是$\frac{1}{4}$。

而選英文得 90 分的機率計算如下：

C:選英文的事件

P(C)=$\frac{1}{2}$

P(B∩C)=P(C)P(B/C)=$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\because P(B\cap C)=\frac{1}{3} > P(B\cap A)=\frac{1}{4}$

所以選英文比較容易得 90 分。

9. 有 3 個橘子和 4 個梨子，求兩次都拿到橘子的機率。

在過去，此題的解法如下:

第一次拿到橘子的機率是$\frac{3}{7}$，因為拿掉了 1 個橘子，只剩下 2 個橘子和 4 個梨子，所以第二次又拿到橘子的機率是$\frac{2}{6}$。此題的答案是$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$。

如果用條件機率的思維，解法如下:
A:第一次拿到橘子的機率
B:第二次拿到橘子的機率

$P(A)=\frac{3}{7}$

$P(B/A)=\frac{2}{6}$

$P(A\cap B)$:第一次拿到橘子，第二次又拿到橘子的機率。

$P(A\cap B)=P(A)P(B/A)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$

10. 承上題，求第二次拿到梨子的機率。

答案: $\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{7}$

和上題的答案比較，可以知道第二次比較有可能拿到梨子。這是因為第二次拿水果時，梨子有 4 個，橘子只剩 2 個。

11. 有 7 個物件，其中 3 個有獎，4 個沒有。甲先抽，乙後抽，求兩人得獎的機率。

甲得獎的機率是$\frac{3}{7}$，未得獎的機率是$\frac{4}{7}$。

乙得獎有兩種可能:

(1)甲中獎，乙也中獎，機率是$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$。

(2)甲未中獎，乙中獎，機率是$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$。

∴ 乙中獎的機率是$\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$。

結論:兩人得獎機會相等，並無先後之別。

12. z 個物件中，x 個有獎，甲乙依序抽獎，試證甲乙得獎的機率相等。

甲中獎機率$\frac{x}{z}$，甲不中獎機率$\frac{z-x}{z}$。

甲中獎，乙中獎機率$\frac{x}{z}\times\frac{x-1}{z-1}=\frac{x^2-x}{z(z-1)}$。

甲不中獎，乙中獎機率$\frac{z-x}{z}\times\frac{x}{z-1}=\frac{zx-x^2}{z(z-1)}$。

乙中獎機率$\frac{x^2-x}{z(z-1)}+\frac{zx-x^2}{z(z-1)}=\frac{zx-x}{z(z-1)}=\frac{x(z-1)}{z(z-1)}=\frac{x}{z}$。

由此可證，甲乙中獎的機率相等。

以下的題目是求 P(A∪B)，希望同學知道 A∪B 的意義。除此之外，同學們不妨注意題目中，A 與 B 都是獨立事件，因此 P(B/A)=P(B)，P(A/B)=P(B)，∴ P(A∩B)= P(B/A)P(A)=P(A)P(B)

13. 甲考 90 分的機率是 0.9，乙考 90 分的機率是 0.8，求至少一人考 90 分的機率。

A:甲考 90 分
B:乙考 90 分
P(A)=0.9，P(B)=0.8

A 和 B 是互相獨立的，因此兩人都考 90 分的機率是 P(A∩B)=P(A)P(B)=0.9×0.8=0.72。

至少一人考 90 分的事件是 A∪B
P(A∪B)=P(A)+P(B)－P(A∩B)=0.9+0.8-0.72=0.98

以上的答案可以從另外兩種方法求得:

(a)兩人都未考 90 分的機率是$(1-0.9)(1-0.8)=0.1\times0.2=0.02$

∴ 至少一人考 90 分的機率是 1-0.02=0.98。

(b)至少一人考 90 分的情形有 3 種:
(1)甲考 90 分，乙沒有，機率是$0.9\times(1-0.8)=0.18$。
(2)乙考 90 分，甲沒有，機率是$(1-0.9)\times 0.8=0.08$。
(3)甲乙都考 90 分的機率是 0.9×0.8=0.72。
因此，至少一人考 90 分的機率是 0.18+0.08+0.72=0.98。

各種方法都可求得正確答案。

14. 擲骰子兩次，至少有一次出現 1 或 2 的機率。

A:至少有一次出現 1
B:至少有一次出現 2

至少有一次出現 1 可能有三種情況：

(1)先出現 1，之後出現不是 1 的數字，機率是$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$。

(2)先出現不是 1 的數字，之後出現 1，機率是$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$。

(3)兩次都出現 1 的機率是$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$。

$P(A)=\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$

同理可得 $P(B)=\frac{11}{36}$

$P(A\cap B)$代表至少有一次是 1，而且至少有一次是 2。會有兩種可能:
(1)先出現 1，再出現 2
(2)先出現 2，再出現 1。

$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{36}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}-\frac{2}{36}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

以上所有可能的情形：
(1,1) (1,2) ⋯ (1,6)
(2,1) (2,2) ⋯ (2,6)
(3,1) (3,2)

(4,1) (4,2)
(5,1) (5,2)
(6,1) (6,2)

共 20 種，故機率為$\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$。

還有一個方法來解這題:

第一次不出現 1 或 2 的機率是$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，第二次不出現 1 或 2 的機率也是$\frac{2}{3}$。兩次都不出現一次 1 或 2 的機率是$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，因此兩次至少出現一次 1 或 2 的機率是$1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$。

15. 擲骰子兩次，求至少一次出現 1 的機率。

A:第一次出現 1
B:第一次出現 1

P(A)=$\frac{1}{6}$

P(B)=$\frac{1}{6}$

P(A∩B)=$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

∴ P(A∪B)=P(A)+P(B)−P(A∩B)=$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$

各種情形如下:
(1,1) (1,2) ⋯ (1,6)
(2,1) (3,1) (4,1) (5,1) (6,1)

共 11 種，故機率為$\frac{11}{36}$。

我們也可以用以下的方法:
至少有一次是 1 的情形:

(1)先出現 1，之後出現不是 1 的數字，機率是$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$。

(2)先出現不是 1 的數字，之後出現 1，機率是$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$。

(3)兩次都出現 1 的機率是$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$。

∴ 至少有一次是 1 的機率是$\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$。

16. 飛彈打飛機命中率是 0.7，求兩次發射飛彈，至少有一次命中飛機的機率。

A:兩次發射都不命中的事件
P(A)= $(1-0.7)(1-0.7)=0.3\times0.3=0.09$
至少有 1 次命中的機率是 1-P(A)=1-0.09=0.91。

另一做法:
A:第一次命中
B:第二次命中
A∩B:兩次都命中
A∪B:至少有 1 次命中
P(A)=0.7
P(B)=0.7
P(A∩B)= $0.7\times0.7=0.49$
P(A∪B)=P(A)+P(B)－P(A∩B)=0.7+0.7-0.49=0.91

我們也可以用以下的解法:
至少有一次命中的情形有 3 種:
(1)第一次命中，第二次沒有，機率是$0.7\times(1-0.7)=0.21$。
(2)第一次沒有，第二次命中，機率是$(1-0.7)\times0.7=0.21$。
(3)兩次都命中的機率是 0.7×0.7=0.49。
因此，有一次命中的機率是 0.21+0.21+0.49=0.91。

17. 承上題，求發射三次飛彈，至少一次命中的機率。

$1-(1-0.7)^3=1-(0.3)^3=1-0.027=0.973$

18. 五戰三勝，甲勝的機率是 0.7，但甲已經敗了兩次，求甲勝的機率。

甲必須連贏三次，因此甲勝的機率是$(0.7)^3=0.343$。

19. 甲乙想進某大學，甲的機率是 0.8，乙的機率是 0.7，求至少一人能進此大學的機率。

此機率是$0.8 + 0.7 - 0.8 \times 0.7 = 1.5 - 0.56 = 0.94$

另一做法:
$1 - (1 - 0.8) \times (1 - 0.7) = 1 - 0.06 = 0.94$

20. 承上題，求只有一人進此大學的機率。

只有一人進此大學有 2 種情形:
(1)甲進乙未進
(2)甲未進乙進
故只有一人進此大學的機率是$0.8 \times (1 - 0.7) + (1 - 0.8) \times 0.7 = 0.24 + 0.14 = 0.38$。

我們不妨看看這個答案對不對。

甲乙想進某大學，一共只有 3 種情形:
(1)甲乙都進的機率是$0.8 \times 0.7 = 0.56$。
(2)甲乙都未進的機率是$(1 - 0.8) \times (1 - 0.7) = 0.06$。
(3)只有一人進的機率是 0.38。
0.56+0.06+0.38=1

所以我們的答案是正確的。

21. 在五戰三勝制比賽中，三場下來，甲勝了一場。如果甲比賽獲勝的機率想要大於 0.5，他單場獲勝的機率至少要多少？

甲必須連勝兩場，令甲單場獲勝的機率是 x，則
$x^2 > 0.5$
$\mathrm{x} > \sqrt{0.5} = 0.707$

22. 承上題，兩場下來，甲都未勝，如果甲比賽獲勝的機率想要大於 0.5，他單場獲勝的機率至少要多少？

此時，甲必須連勝三場，故
$x^3 > 0.5$
$\mathrm{x} > 0.793$

23. 男生 40 人，會游泳者佔 50%，女生 60 人，會游泳者佔 60%。求一位會游泳的機率。

A_1: 男生，P(A)=$\frac{40}{100} = 0.4$

A_2: 女生，P(B)=$\frac{60}{100} = 0.6$

B: 會游泳
$A_1 \cap \mathrm{B}$: 是男生，也會游泳
$A_2 \cap \mathrm{B}$: 是女生，也會游泳
$P(A_1 \cap \mathrm{B}) = 0.4 \times 0.5 = 0.2$
$P(A_2 \cap \mathrm{B}) = 0.6 \times 0.6 = 036$
$\mathrm{P(B)} = P(A_1 \cap \mathrm{B}) + P(A_2 \cap \mathrm{B}) = 0.2 + 0.36 = 0.56$

24. 承上題，已知一位會游泳，求此人是男生的機率。

$$P(\mathrm{A}_1/\mathrm{B}) = \frac{P(A_1 \cap \mathrm{B})}{P(B)} = \frac{0.2}{0.56} = 0.36$$

25. 承上題，求此人是女生的機率。

$$P(\mathrm{A}_2/\mathrm{B}) = \frac{P(A_2 \cap \mathrm{B})}{P(B)} = \frac{0.36}{0.56} = 0.64$$

從以上兩題的答案中，可以看出$P(\mathrm{A}_1/\mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_2/\mathrm{B}) = 0.36 + 0.64 = 1$。所以答案是可信的。

26. 6 個蘋果有 2 個不好，4 個梨子有 3 個不好，求一個水果不好的機率。

A_1: 蘋果，P(A)=$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

A_2: 梨子，P(B)=$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

B: 不好的水果

$P(B/A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(B/A_2) = \frac{3}{4}$

$$\therefore\ P(A_1\cap \mathrm{B})=P(A_1)P(B/A_1)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

$$P(A_2\cap \mathrm{B})=P(A_2)P(B/A_2)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

$$\therefore\ P(B)=P(A_1\cap \mathrm{B})+P(A_2\cap \mathrm{B})=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

我們也不必如此大費周章地求解，從題意，我們可以看出 10 個水果中，有 5 個是不好的，因此 B=$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$。

27. 承上題，已知一個水果是不好的，求此水果是蘋果的機率。

$$P(\mathrm{A}_1/\mathrm{B})=\frac{P(A_1\cap \mathrm{B})}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$$

我們也可以如此想，5 個不好的水果中，有 2 個是蘋果，因此$P(\mathrm{A}_1/\mathrm{B})=\frac{2}{5}$。

28. 承上題，求此水果是梨子的機率。

$$P(\mathrm{A}_2/\mathrm{B})=\frac{P(A_2\cap \mathrm{B})}{P(B)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$$

29. 一個社區中 40%家庭養狗，30%家庭養貓，養狗家庭中有 20%又養貓。求養狗又養貓的家庭機率。

A:養狗家庭，P(A)=0.4
B:養貓家庭，P(B)=0.3
P(B/A)=0.2
∴ P(A∩B)=P(A)P(B/A)= $0.4\times0.2=0.08$

30. 承上題，求養貓家庭又養狗的機率。

P(A/B)= $\frac{P(A\cap B)}{\mathrm{P(B)}}=\frac{0.08}{0.3}=0.266$

31. 甲袋中有 4 個蘋果和 2 個梨子，乙袋中有 3 個蘋果和 2 個梨子。將一個水果從甲袋拿出，放入乙袋。再從乙袋拿出一個水果，求此水果是蘋果的機率。

從甲袋中拿出水果有兩種可能:
(a)蘋果
(b)梨子
A:從甲袋中拿出的是蘋果
B:從乙袋中拿出的是蘋果
現在，我們分別討論兩種可能:

(1)從甲袋中拿出的是蘋果，P(A)=$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$。

將此蘋果放入乙袋中，乙袋中有 4 個蘋果和 2 個梨子。

∴ P(B/A)=$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

P(B∩A)=P(A)P(B/A)=$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

(2)從甲袋中拿出的不是蘋果
令$\overline{A}$=從甲袋中拿出的不是蘋果，而是梨子。

$P(\overline{A})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

將此梨子放入乙袋中，乙袋中有 3 個蘋果和 3 個梨子。

∴ P(B/$\overline{A}$)=$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

∴ $\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\overline{A})=P(\overline{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}/\overline{A})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

∴ P(B)=P(B∩A)+ $\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\overline{A})=\frac{4}{9}+\frac{1}{6}=\frac{11}{18}$

32. 承上題，已知從乙袋拿出的是蘋果，求從甲袋中拿出的是蘋果的機率。

P(A∩B)=$\frac{4}{9}$

P(B)=$\frac{11}{18}$

∴ P(A/B)= $\frac{P(A\cap B)}{\mathrm{P(B)}}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{11}{18}}=\frac{8}{11}$

33. 甲袋中有 4 白球，1 黑球，乙袋中有 5 白球，2 黑球。從甲袋拿一球到乙袋，再從乙袋中取出一球，求此球是白球的機率。

A:從甲袋中拿出的是白球
B:從乙袋中拿出的是白球

P(A)=$\frac{4}{5}$

P(B/A)=$\frac{5+1}{5+2+1}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

∴ P(B∩A)=P(A)P(B/A)=$\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$

令$\overline{A}$=從甲袋中拿出的是黑球

$P(\overline{A})=\frac{1}{5}$

P(B/$\overline{A}$)=$\frac{5}{5+2+1}=\frac{5}{8}$

$\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\overline{A})=P(\overline{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}/\overline{A})=\frac{1}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$

∴ P(B)=P(B∩A)+ $\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\overline{A})=\frac{3}{5}+\frac{1}{8}=\frac{29}{40}$

34. 承上題，求從乙袋中拿出黑球的機率。

A:從甲袋中拿出的是黑球
B:從乙袋中拿出的是黑球

P(A)=$\frac{1}{5}$

P(B/A)=$\frac{2+1}{5+2+1}=\frac{3}{8}$

∴ P(B∩A)=P(A)P(B/A)=$\frac{1}{5}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{40}$

令$\overline{A}$=從甲袋中拿出的是白球

$P(\overline{A})=\frac{4}{5}$

P(B/$\overline{A}$)=$\frac{2}{5+2+1}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\overline{A})=P(\overline{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}/\overline{A})=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

$\therefore\ P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap \overline{A})=\frac{3}{40}+\frac{1}{5}=\frac{11}{40}$

同學們可以從上一題的答案中知道，從乙袋中拿出白球的機率是$\frac{29}{40}$，拿出黑球的機率是$\frac{11}{40}$。注意: $\frac{29}{40}+\frac{11}{40}=1$，所以答案是正確的。

除此以外，我們可以看出從乙袋中拿出白球的機率大於拿出黑球的機率，這是因為黑球比較少的緣故。