(51)機率-2(排列組合)

在這一章，我們要討論與排列組合相關的機率問題。

(1)袋子裡有 5 顆蘋果和 4 顆桃子，拿出一顆蘋果的機率是多少?

答案:$\frac{5}{5+4}=\frac{5}{9}$

(2)承上題，連續拿 2 顆都是桃子的機率是多少?

答案:第一次拿出桃子的機率是$\frac{4}{9}$。

第二次拿出水果時，水果總數變成了 8 個，因此仍然拿出桃子的機率是$\frac{3}{8}$。

因此，這題的機率是$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$。

(3)承上題，兩次拿水果，拿出 1 顆桃子和 1 顆蘋果的機率是多少?

答案:有兩種可能:

(a)先拿出桃子，後拿出蘋果，其機率是$\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{20}{72}=\frac{5}{18}$。

(b)先拿出蘋果，後拿出桃子，其機率是$\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{20}{72}=\frac{5}{18}$。

因此，此題的機率是$\frac{5}{18}+\frac{5}{18}=\frac{5}{9}$。

(4)丟一個銅板 5 次，結果是 3 次正面向上，2 次背面向上的機率是多少?

我們以 1 代表正面向上，0 代表背面向上，以下是幾個 3 次正面向上，2 次背面向上的例子:

11100
10101

00111
01110

所以我們可以將此問題看成 3 個 1 和 2 個 0 的排列，排列總數是

$\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)(2\times1)}=10$。

總共可能出現的情形有$2^5=32$種，故此題的機率是$\frac{\frac{5!}{3!2!}}{2^5}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$。

(5)將 1,2,3,4,5 排列，2 出現在第一位的機率是多少?

因為 2 一定要出現在第一位，我們只要排列 1,3,4,5，排列的方法是 4!，總共排列的方法有 5!種，故此題的機率是$\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$。

(6)有 5 位男生和 5 位女生排成一列,每位男生旁邊必有一位女生的機率是多少?

因為每一位男生旁邊必有一位女生,我們先將5位男生排成一排,但中間有空格，如下圖:

OXOXOXOXOXO

以上的圖中，x 是 5 位男生站的地方，還有 6 個空格可以讓 5 位女生去站。男生排列有 5!種方法，女生排列有P_5^6!種方法，因此這種排列的方法有$5!\,P_5^6$!種。10 個人排列的方法有 10!種，因此，此題的機率是$\frac{5!P_5^6!}{10!}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{10\times9\times8\times7}=\frac{1}{42}$。

(7)丟銅板 6 次，每兩次結果都相同的機率是多少?

丟銅板的結果是 1 或 0，兩次連相同只有 2 種可能(1,1)或(0,0)，雖然丟了 6 次銅板，我們應該看成只有 3 個事件，如(0,0)(1,1)(1,1)或(1,1)(0,0)(1,1)。因此，合乎這個條件的事件共有$2^3=8$種可能，丟銅板 6 次，共有$2^6=64$種可能，故此題的機率是$\frac{2^3}{2^6}=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$。

(8)丟銅板 8 次，5 次正面，3 次反面的機率是多少?

我們可以想成 5 個 1 和 3 個 0 的排列，這種排列的方法有$\frac{8!}{5!3!}=56$種。

丟銅板 8 次，共有$2^8=256$種可能，故此題的答案是$\frac{\frac{8!}{5!3!}}{2^8}=\frac{56}{256}=\frac{7}{32}$。

(9)將 26 個英文字母排列，x 落在第 a 位置的機率是多少?

這個問題並不必看成一個排列的問題，而應該想成，將 x 落入 a 位置的機率。

一共有 26 個位置，因此 x 落入 a 位置的機率是$\frac{1}{26}$。

(10)將 26 個英文字母排列，e 和 g 必須相鄰的機率是多少?

e 和 g 必須相鄰，可以看成一個物件，這個物件內部排列有 2!種方法，因此合乎條件的排列共有(25!)(2!)種。
全部排列有 26!種

此題的機率是$\frac{25!2!}{26!}=\frac{2}{26}=\frac{1}{13}$。

(11)將 26 個英文字母排列，x 落在 a 處，y 落在 b 處的機率是多少?

x 落在 a 處的機率是$\frac{1}{26}$。

y 再落在 b 處的機率是$\frac{1}{25}$。

因此，此題的機率是$\frac{1}{26}\times\frac{1}{25}=\frac{1}{650}$。

(12)從 1, 2, 3, 4, 5 中取出 2 個數字，兩個都是奇數的機率是多少?

1, 2, 3, 4, 5 中，有 3 個數字是奇數，取出 2 個的情形有C_2^3種，5 個數字中，取 2 個的情形有C_2^5種，故此題的機率是$\frac{C_2^3}{C_2^5}=\frac{\frac{3\times2}{2}}{\frac{5\times4}{2}}=\frac{3}{10}$。

(13)將 1, 2, 3, 4, 5 排列，前 2 項是奇數的機率是多少?

3 個奇數取出 2 個排列，共有$P_2^3=6$種排列方法，其餘的 3 個數字排列方法有 3!種。
合乎條列的排列有$P_2^3 3!=(3\times2)(3\times2\times1)=36$種。

5 個數字的排列有 5!種，故此題的機率是$\frac{P_2^3 3!}{5!}=\frac{(3\times2)3!}{5\times4\times3!}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$。

(14)將英文字母a, b, c, d, e排列，其中a和b之間必須夾一個字母的機率是多少?

a和b之間的字母一定是c, d, e中的一個，選擇方法有3種。
a和b之間夾一個字母，這3個字母構成一個物件，這個物件的排列方法有2!種，因為a和b可以交換。
除了這3個字母的物件以外，還有2個字母，因此共有3個物件。合乎條件的排列共有3(3!)(2!)種。

全部5個字母的排列方法有5!種，故此題的機率是$\frac{3\times 3!2!}{5!}=\frac{3\times(3!)(2!)}{5\times 4\times 3!}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

(15)從1, 2, 3, 4, 5中選出2個數字組成一個2位數，可以重複選，但這2個數字必須不同的機率是多少?

因為2個數字不同，因此情形共有P_2^5種。
因為可以重複選取，全部可能的數字有5^2種。

故此題的機率是$\frac{P_2^5}{5^2}=\frac{5\times 4}{5\times 5}=\frac{4}{5}$。

(16)數字1, 3, 3, 5排成一個4位數，千位數是5的機率是多少?

千位數是5，剩下3個數字1, 3, 3，這3個數字的排列方法有$\frac{3!}{2!}$種。所有的排列方法有$\frac{4!}{2!}$種，故此題的機率是$\frac{\frac{3!}{2!}}{\frac{4!}{2!}}=\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4}$。

(17)承上題，假如千位數是3的機率是多少?

千位數是3以後，尚有3個數字要排列，因此合乎條件的排列有3!種，全部排列有$\frac{4!}{2!}$種，故此題的機率是$\frac{3!}{\frac{4!}{2!}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。

(18)數字0, 0, 1, 2, 2排成一個5位數，但必須是5的倍數的機率是多少?

任何數字如是5的倍數，其個位數必須是0或5，本題沒有5，只有0。
萬位數只可以是1和2，同時，個位數是0。

假設萬位數是1，個位數是0，剩下0, 2, 2的排列，共有$\frac{3!}{2!}$種方法。

假設萬位數是2，個位數1是0，剩下0, 1, 2的排列，排列方法有3!種。

合乎條件的排列有$\frac{3!}{2!}+3!=3+6=9$種。

5 個數字 0, 0, 1, 2, 2 組成 5 位數，有 2 種情形:

萬位數是 1，剩下 0, 0, 2, 2 的排列，有$\frac{4!}{2!2!}$種方法。

萬位數是 2，剩下 0, 0, 1, 2 的排列，有$\frac{4!}{2!}$種方法。

故此題的機率是$\frac{\frac{3!}{2!}+3!}{\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!}}=\frac{3+6}{6+12}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$。

(19)數字 0, 0, 1, 2, 2 能組成 5 位數的機率是多少?

方法 1: 5 位數的萬位數不能是 0，一定要在 1, 2, 2 中選一個，選取方法有 2 種，非 1 即 2。

若萬位數是 1，剩下 0, 0, 2, 2，有$\frac{4!}{2!2!}$種排列方法。

若萬位數是 2，剩下 0, 0, 1, 2，有$\frac{4!}{2!}$種排列方法。

故合乎條件的排列有$\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!}$。

5 個數字全選的排列方法是$\frac{5!}{2!2!}$。

故此題的機率是$\frac{\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!2!}}{\frac{5!}{2!2!}}=\frac{12+6}{\frac{5\times4\times3!}{4}}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$。

方法 2:要解這個題目還有一個方法，要知道 5 位數的萬位數不能是 0，因此我們先看首位是 0 的排列有多少。

0, 0, 1, 2, 2 中有 2 個 0，選定任何一個 0 以後的排列有$\frac{4!}{2!}$種。

首位為 0 的排列共有$\frac{4!}{2!}$種。

全部排列的數目是$\frac{5!}{2!2!}$。

∴ 首位為 0 的機率是$\frac{\frac{4!}{2!}}{\frac{5!}{2!2!}}=\frac{12}{\frac{5!}{4}}=\frac{12}{5\times3\times2}=\frac{2}{5}$。

∴ 首位不為 0 的機率是$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$。

故此題的機率是$\frac{3}{5}$。

(20)袋子裡有 5 顆蘋果和 4 顆桃子，兩次拿水果，拿出 2 顆蘋果的機率是多少?

答案:$\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$

(21)袋子裡有 5 顆蘋果和 4 顆桃子，兩次拿水果，拿出 2 顆桃子的機率是多少?

答案: $\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$

(22)袋子裡有 5 顆蘋果和 4 顆桃子，兩次拿水果，拿出 1 顆蘋果和 1 顆桃子的機率是多少?

答案:$\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$

各位同學可以看出，從袋子裡拿出 2 個水果，只有以上所說的 3 種情形。機率總和是$\frac{5}{18}+\frac{1}{6}+\frac{5}{9}=\frac{5+3+10}{18}=\frac{18}{18}=1$，可見得上面的想法是對的。