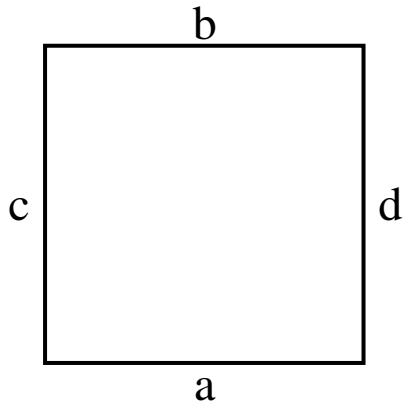


(47)排列-5(環狀)

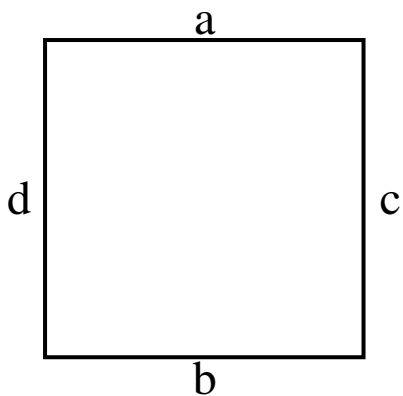
請看下圖



以上的排列中，可以稱之為 bdac，在這排列中每一物件的左鄰跟右鄰列成下表：

物件	左鄰	右鄰
b	c	d
d	b	a
a	d	c
c	a	b

再看下圖：



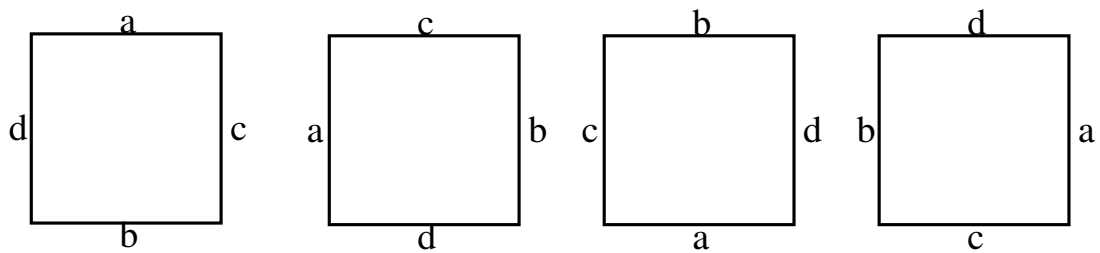
這個排列可以命名為 acbd。

我們再看一次這種排列下，每一物件的左鄰和右鄰：

物件	左鄰	右鄰
----	----	----

b	c	d
d	b	a
a	d	c
c	a	b

因此，對環狀排列而言，bdac 和 acbd 是一樣的，事實上，以下四個環狀排列是一樣的，acbd, cbda, bdac, dacb 都是一樣的，如下圖所示：



對於任何一個 n 不同物件的排列，都有 n 個環狀排列，假設 $n=3$ ，物件是 A、B 和 C，排列是 BAC，以下 3 個排列是 BAC 對應的環狀排列：
BAC，ACB，CBA

假設 $n=4$ ，物件是 A、B、C、D，排列是 CDAB，以下 4 個排列是對應於 CDAB 的環狀排列：
CDAB，DABC，ABCD，BCDA

我們可得到以下的定律：
任何 n 個不同物件的排列，都有 n 個環狀排列。.....(47.1)

對應於同一排列的環狀排列都是相同的因素，我們有以下的定理：

n 個不同物件的環狀排列數量。

$$\frac{P_n^n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)! \dots\dots\dots(47.2)$$

(1) $n=4$ 的環狀排列：

$$\frac{P_n^n}{n} = (n-1)! = 3! = 6$$

假設這四個物件是 ABCD，則這六個環狀的排列是：

- ABCD.....(47.3)
- ABDC.....(47.4)
- ACBD.....(47.5)
- ACDB.....(47.6)
- ADBC.....(47.7)
- ADCB.....(47.8)

也許同學會問，BACD 為何不在以上的排列中，我們可以看出，BACD 有一個對應的環狀排列 ACDB 就是 (47.6)，所以我們可以說，(47.6) 包含了 BACD。

同學們一定會問，假如有一個排列，如何列出所有的排列對應的環狀排列呢？

令這個排列為 $X_1X_2\cdots X_n$ ，則以下的排列是對應此排列的全部環狀排列：

- $X_1X_2\cdots X_{n-1} X_n$
- $X_2X_3\cdots X_n X_1$
- $X_3X_4\cdots X_1 X_2$
- .
- .
- .
- $X_nX_1\cdots X_{n-2} X_{n-1}$

(2) 請列出 31542 的環狀排列：

答案：31524，15423，54231，42315，23154

(3) 請列出 ABCDE 的環狀排列：

答案：ABCDE，BVDEA，CDEAB，DEABC，EABCD

最後，我們要討論如何列出所有的環狀排列，我們應該記得， n 個不同物件環狀排列數是 $(n-1)!$ ，這應該給我們一個靈感，解決此問題，方法如下：

1. 令此物件為 a_1, a_2, \dots, a_n
2. 選取任一物件 a_i
3. 列出 a_i 以外的 $(n-1)$ 物件
4. 列出 $(n-1)$ 物件的所有排列
5. 在某一個排列的最前面加上 a_i

(4) 列出 1234 的全部環狀排列：

答案：假設我們選了 2，我們觀察列出所有 134 的排列如下

134

143

314

341

413

431

然後，我們將 2 加到做前面去。

2134

2143

2314

2341

2413

2431

(5) 列出 123 的環狀排列：

答案：架設我們選了 3，我們排列 1 和 2 如下：

12

21

再將 3 放到前面去，得到

312

321

以上是 123 的全部環狀排列。