

(46)排列-4(不全相異，全選，直線)

在過去，我們假設所有的物件是相異的，在這一章，我們假設有些物件是相同的而且全選排列的種類會少得多。

假設我們有 3 個物件，3 個物件都是 a，我們可以將他們命名為 $a_1a_2a_3$ ，請注意 a_1 ， a_2 和 a_3 ，其實都是 a，並無不同。

因為 $n=3$ ，因此 a_1 ， a_2 和 a_3 的全選排列有 $P_3^2 = 3! = 6$ 種，但事實上，他們只有一種排列，那就是

aaa

假設我們有 2 個 a 和 1 個 b，我們可以將它們命名為 a_1, a_2 和 b，它們也只有 6 種排列如下：

a_1a_2b

a_1ba_2

a_2a_2b

a_2ba_1

ba_1a_2

ba_2a_1

但因為 a_1 和 a_2 都是 a，因此只有以下三種排列

aab

aba

baa

假設我們有 n 個物件，其中有 r_1, r_2, \dots, r_k 物件是相同的，它們的排列種類可以用以下的公式得到

$$\frac{P_n^n}{P_{r_1}^{r_1} P_{r_2}^{r_2} \dots P_{r_k}^{r_k}} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

(1) 假設我們有 3 個橘子和 4 個蘋果，他們的排列種類有多少？

答案：

$$n=3+4=7$$

$$r_1=3$$

$$r_2=4$$

排列種類有

$$\frac{P_7^7}{P_3^3 P_4^4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35$$

(2) 假設我們有 2 個 a，3 個 b，1 個 c 和 1 個 d，他們排列有多少個？

答案：

$$n=2+3+1+1=7$$

$$r_1=2$$

$$r_2=3$$

$$r_3=1$$

$$r_4=1$$

排列的種類有

$$\frac{7!}{(2!)(3!)(1!)(1!)} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 6} = 420$$