

(44)排列-2(相異，部分選擇，不能複選，直線)

假設我們有  $n$  個相異的物件，我們只能選  $r$  ( $r \leq n$ ) 個物件來排列。我們先假設  $r=2$ ，物件以 1, 2, 3, 4 代表，所有的排列如下：

- 1, 2
- 1, 3
- 1, 4
- 2, 1
- 2, 3
- 2, 4
- 3, 1
- 3, 2
- 3, 4
- 4, 1
- 4, 2
- 4, 3

一共有 12 種排列方法。同學們要知道，如果全選，共有  $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  種排列方法，如果不全選，排列方法少得多。

如果全選，共有  $n(n-1)(n-2)\cdots = n!$  個排列方法，如果只選  $r$  個，則

- 第一位置有  $n$  個選擇
- 第二位置有  $(n-1)$  個選擇
- ⋮
- 第  $r$  個位置有  $(n-r+1)$  個選擇

所以排列方法有  $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$  種，通常我們用  $P_r^n$  代表部份選擇的排列方法數目。

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdots\cdots\cdots (44-1)$$

(44-1) 可以寫成另一種形式：

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

∴  $P_r^n$  可以用以下的公式：

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{P_r^n}{(n-1)!} \dots\dots\dots (44-2)$$

同學們最好仍用(44-1)這個公式，因為這個公式很容易了解，也可以使同學知道  $P_r^n$  是如何求得的。

(1) 5 個不同的數字，取 2 個數字的排列

$$P_2^5 = 5 \times 4 = 20$$

(2) 6 個不同的數字，取 3 個數字的排列

$$P_3^6 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

(3) 已知  $P_4^n = 4P_3^n$ ，求 n

$$P_4^n = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$P_3^n = n(n-1)(n-2)$$

$$\therefore n(n-1)(n-2)(n-3) = 4n(n-1)(n-2)$$

$$n-3=4$$

$$n=7$$

(4) 已知  $P_{r+1}^{10} = 5P_r^{10}$ ，求 r

$$P_{r+1}^{10} = 10 \times 9 \times 8 \times \dots (10-r+1)(10-r)$$

$$P_r^{10} = 10 \times 9 \times 8 \times \dots (10-r+1)$$

$$\therefore 10 \times 9 \times 8 \times \dots (10-r+1)(10-r) = 5 \times 10 \times 9 \times 8 \times \dots (10-r+1)$$

$$\therefore 10 - r = 5$$

$$r=5$$

(5)10~99 中，有多少數字是由不同奇數所組成？

奇數是 1, 3, 5, 7, 9，個位數和十位數必須是不同的奇數，舉例來說，33 不是我們要的，52 也不是我們要的，這個問題其實就是從 1, 3, 5, 7, 9 中選 2 個數字來排列。

$$P_2^5 = 5 \times 4 = 20$$

這 20 個數字是

13, 15, 17, 19

31, 35, 37, 39

51, 53, 57, 59

71, 73, 75, 79

91, 93, 95, 97

(6)00~99 中，有多少數字是由不同數字所組成？

十位數有 10 個數字可選，一旦選了，個位數只有 9 個數字可選，所以答案是  $P_2^{10} = 10 \times 9 = 90$ 。

從這個答案，我們可以知道 00~99 中，有  $100-90=10$  個數字是由相同數字組成的，它們是 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99。

(7)000~999 中，有多少數字是由不同數字所組成？

這題等於從 0~10 中取 3 個數字來排列，因此答案是  $P_3^{10} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ 。

從這個答案，我們可以看出 000~999 中，有  $1000-720=280$  個數字，百位數、十位數和個位數中，至少有兩個數字是相同的，如

252, 337, 414, 535, 616, 770, 818, 999。

(8)有一個三位數，其中有 2 個數字是 3，請問這種數字有多少個？

符合這題的數字有 337, 433, 553, 393, 338 等等。

我們首先要問，不同於 3 的數字可以放在哪裡？

答案是  $P_1^3 = 3$

不同於 3 的數字可以放在百位數、十位數和個位數的任一位置

不同於 3 的數字一共有 9 個，因此這題的答案是  $P_1^3 P_1^9 = 3 \times 9 = 27$

它們是：

033 303 330  
133 313 331  
233 323 332  
433 343 334  
533 353 335  
633 363 336  
733 373 337  
833 383 338  
933 393 339

(9)000~999 中，有 2 個或 3 個相同數字組成的數字有多少個？

對任一個三位數，所有組成數字都一樣的，只有 10 個，它們是

000, 111, 222, ..., 999。一共有 10 個數字(0~9)可以相同，根據以上題目，每選一個數字，可以在一個三位數中兩兩相同，共有  $1 + P_1^3 P_1^9 = 28$  個數字中，至少有 2 個數字相同。從 0~9 中，我們有 10 種選擇，因此從 000~999，共有  $P_1^{10}(1 + P_1^3 P_1^9) = 10 \times 28 = 280$ 。

在題(7)中，我們知道有 280 個數字中的組成數字是不同的，現在我們知道 280 是如何求得的。

假設同樣的數字是 2，這 28 個數字如下：

222  
220, 221, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229  
202, 212, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292  
022, 122, 322, 422, 522, 622, 722, 822, 922

一共 28 個