(42)數學歸納法

我們常常要證明一個數學公式的成立，如果用數學歸納法，做法如下:

第一步:證明此公式在 n 為起始值成立。

第二步:證明如果此公式在 n=m 時可以成立,則可導出此公式在 n=m+1 時可以成立。

以下是一些例子:

(1) $a_i = 1$
$a_{i+1} = 2a_i + 1$
$a_n = 2^n - 1$

用數學歸納法:

第一步　n=1 時，左式 $= a_1$，右式 $= 2^n - 1 = 2^1 = 1$

$\therefore$ 左式 = 右式

因此，$a_n = 2^n - 1$ 在 $\mathrm{n} = 1$ 時成立

第二步　假設$a_n = 2^n - 1$在 n=m 時成立，我們考慮 n=m+1

左式 $= a_{m+1} = 2a_m + 1 = 2(2^m - 1) + 1 = 2^{m+1} - 2 + 1 = 2^{m+1} - 1$

右式 $= 2^{m+1} - 1$

$\therefore$ $a_n = 2^n - 1$ 在 $\mathrm{n} = \mathrm{m} + 1$ 也成立

$\therefore$ $a_n = 2^n - 1$ 成立

(2) $S_n = 1 + 2 + \cdots + \mathrm{n} = \frac{n(n+1)}{2}$

這個公式可以用等差級數來證明，現在我們用數學歸納法

第一步　n=1

$S_n = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

$\therefore \ S_n = \frac{n(n+1)}{2}$在 n = 1 時成立

假設$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$在 m 時成立

$S_m = \frac{m(m+1)}{2}$

我們要證明$S_{m+1} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$

左式 $= S_{m+1} = S_m + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$

右式 $= \frac{(m+1)(m+2)}{2} =$ 左式

$\therefore \ S_n = \frac{n(n+1)}{2}$成立

(3) $1 + \mathrm{h} + h^2 + \cdots + h^n = \frac{1-h^{n+1}}{1-h}$

這個公式在前面討論等比級數時證明過，現在我們用數學歸納法

第一步　n=1

左式 $= 1 + \mathrm{h} + h^2 + \cdots + h^n = 1 + h$

右式 $= \frac{1-h^{1+1}}{1-h} = \frac{1-h^2}{1-h} = \frac{(1+h)(1-h)}{1-h} = 1 + h =$ 左式

$\therefore \ 1 + \mathrm{h} + h^2 + \cdots + h^n = \frac{1-h^{n+1}}{1-h}$在 n = 1 時成立

現在假設此公式在 n=m 時成立，我們要證明$1+\mathrm{h}+h^2+\cdots+h^m+h^{m+1}=\frac{1-h^{m+2}}{1-h}$

$$左式=1+\mathrm{h}+h^2+\cdots+h^m+h^{m+1}=\frac{1-h^{m+1}}{1-h}+h^{m+1}$$
$$=\frac{1-h^{m+1}}{1-h}+\frac{(1-h)h^{m+1}}{1-h}=\frac{1-h^{m+1}+h^{m+1}-h^{m+2}}{1-h}=\frac{1-h^{m+2}}{1-h}=右式$$

∴ 此公式成立

(4) $1+5+9+\cdots+(4\mathrm{n}-3)=\mathrm{n}(2\mathrm{n}-1)$

第一步 n=1， $左式=4\times1-3=1$

$右式=1(2\times1-1)=1$

∴ 此公式在 n=1 時成立

第二步 假設$1+5+9+\cdots+(4\mathrm{m}-3)=\mathrm{m}(2\mathrm{m}-1)$

我們要證明

$1+5+9+\cdots+(4\mathrm{m}-3)+(4(\mathrm{m}+1)-3)=(\mathrm{m}+1)(2(\mathrm{m}+1)-1)$

$1+5+9+\cdots+(4\mathrm{m}-3)+(4m+1)=(\mathrm{m}+1)(2\mathrm{m}+1)$

$1+5+9+\cdots+(4\mathrm{m}-3)=\mathrm{m}(2\mathrm{m}-1)$

$左式=\mathrm{m}(2\mathrm{m}-1)+(4m+1)=2m^2+3m+1=(2m+1)(m+1)=右式$

∴ 此公式成立

(5) Fibonacci 數列

$F_0=0$

$F_1=1$

$F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$

$F_2 = F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1$

$F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3$

$F_5 = F_3 + F_4 = 2 + 3 = 5$

$\vdots$

公式是$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

第一步　n=1

$F_{n+2} = F_3 = 2$

$F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$

$\therefore\ F_1 = F_3 - 1$

$\therefore\ n = 1$ 時，$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$ 成立

假設 n=m 時，$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_m = F_{m+2} - 1$

我們要證明$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_m + F_{m+1} = F_{m+3} - 1$

左式 $= (F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_m) + F_{m+1} = F_{m+2} - 1 + F_{m+1}$
$= F_{m+1} + F_{m+2} - 1 = F_{m+3} - 1 =$ 右式

$\therefore$　此公式成立

(6) $\sum_{h=1}^{n}(-1)^h h^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

我們先看這個公式

n=5

左式 $= -1 + 4 - 9 + 16 - 25 = -15$

右式 $= (-1)^5 \dfrac{5(5+1)}{2} = -15$

n=6

左式 $= -1 + 4 - 9 + 16 - 25 + 36 = 21$

右式 $= (-1)^6 \dfrac{6(6+1)}{2} = 21$

第一步　n=1

左式 $= (-1)^1 1^1 = -1$

右式 $= (-1)^1 \dfrac{1(1+1)}{2} = -1$

∴　此公式在 n=1 時成立

假設$\sum_{h=1}^{m}(-1)^h h^2 = (-1)^m \frac{m(m+1)}{2}$

我們要推導$\sum_{h=1}^{m+1}(-1)^h h^2 = (-1)^{m+1} \frac{(m+1)(m+2)}{2}$

m 為奇數時，$(-1)^m = -1$，$(-1)^{m+1} = 1$

m 為偶數時，$(-1)^m = 1$，$(-1)^{m+1} = -1$

先考慮 m 為奇數時

$$\sum_{h=1}^{m+1}(-1)^h h^2 = \sum_{h=1}^{m}(-1)^h h^2 + (-1)^{m+1}(m+1)^2 = -\frac{m(m+1)}{2} + (m+1)^2$$

$$= \frac{-m(m+1)+2(m+1)^2}{2} = \frac{(m+1)(2(m+1)-m)}{2}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$= (-1)^{m+1}\frac{(m+1)(m+2)}{2}(\text{因為此時}(-1)^{m+1} = 1) = \text{右式}$$

同理可證　當 m 為偶數時$\sum_{h=1}^{m+1}(-1)^h h^2 = (-1)^{m+1}\frac{(m+1)(m+2)}{2}$

∴　此公式成立

(7) $1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \cdots + \mathrm{n}(3\mathrm{n}+1) = \mathrm{n}(n+1)^2$

第一步　n=1

左式 $= 1 \times 4 = 4$

右式 $= 1(2)^2 = 1 \times 4 = 4 =$ 左式

∴　此公式在 n=1 時成立

第二步　假設$1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \cdots + \mathrm{m}(3\mathrm{m}+1) = \mathrm{m}(m+1)^2$

我們要推導$1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \cdots + \mathrm{m}(3\mathrm{m}+1) + (\mathrm{m}+1)(3(\mathrm{m}+1)+1) = (\mathrm{m}+1)(m+2)^2$

左式 $= \mathrm{m}(m+1)^2 + (m+1)(3m+4) = (m+1)(m(m+1)+3m+4)$
$= (m+1)(m^2+4m+4) = (\mathrm{m}+1)(m+2)^2 =$ 右式

∴　此公式成立

(8) $\sum_{h=1}^{n} h^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

第一步　n=1

左式 $=1^2=1$

右式 $=\dfrac{1(2)(3)}{6}=1$

∴　此公式在 n=1 時成立

第二步　假設$\sum_{h=1}^{m} h^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

我們要推導$\sum_{h=1}^{m+1} h^2=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$

$$\text{左式}=\sum_{h=1}^{m} h^2+(m+1)^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+\frac{6(m+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(2m^2+m+6m+6)}{6}=\frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}=\text{右式}$$

∴　此公式成立

(9) $\sum_{h=1}^{n} h^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

第一步　n=1

左式 $=1^3=1$

右式 $=\dfrac{1^2(2)^2}{4}=1$

∴　此公式在 n=1 時成立

第二步　假設$\sum_{h=1}^{m} h^3=\frac{m^2(m+1)^2}{4}$

我們要證明$\sum_{h=1}^{m+1} h^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$

$$左式 = \sum_{h=1}^{m} h^3 + (m+1)^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} + \frac{4(m+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(m+1)^2(m^2+4m+4)}{4} = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4} = 右式$$

∴ 此公式成立

(10) $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{2n}{n+1}$

第一步 n=1

左式=1

$$右式 = \frac{2 \times 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

∴ 此公式在 n=1 時成立

第二步 假設$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+m} = \frac{2m}{m+1}$

我們要證明$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+(m+1)} = \frac{2(m+1)}{m+2}$

$$左式 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+m} + \frac{1}{1+2+\cdots+(m+1)}$$

$$= \frac{2m}{m+1} + \frac{1}{1+2+\cdots+(m+1)}$$

$$= \frac{2m}{m+1} + \frac{1}{\frac{(1+m+1)(m+1)}{2}} \text{(按照等差級數公式)}$$

$$= \frac{2m}{m+1} + \frac{2}{(m+1)(m+2)} = \frac{2m(m+2)+2}{(m+1)(m+2)} = \frac{2(m^2+2m+1)}{(m+1)(m+2)}$$

$$=\frac{2(m+1)^2}{(m+1)(m+2)}=\frac{2(m+1)}{m+2}=\text{右式}$$

∴ 此公式成立

(11) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$

第一步 n=2

$$\text{左式}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1.5$$

$$\text{右式}=\frac{2\times 2}{2+1}=\frac{4}{3}=1.3$$

∴ 公式成立

第二步 假設$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}>\frac{2m}{m+1}$

我們要證明

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m+1}>\frac{2m+2}{m+2}$$

$$\text{左式}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}>\frac{2m}{m+1}+\frac{1}{m+1}=\frac{2m+1}{m+1}$$

$$\text{右式}=\frac{2m+2}{m+2}$$

我們要證明左式>右式

也就是

$$\frac{2m+1}{m+1}>\frac{2m+2}{m+2}$$

$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$中，如 $ad>bc$，則$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$

現在 a=2m+1

b=m+1

c=2(m+1)

d=m+2

$\mathrm{ad} = (2\mathrm{m}+1)(\mathrm{m}+2) = 2m^2 + 5m + 2$

$\mathrm{bc} = (\mathrm{m}+1) \times 2 \times (\mathrm{m}+1) = 2(m+1)^2 = 2m^2 + 4m + 2$

可以看出$\mathrm{ad} = 2m^2 + 5m + 2 > \mathrm{bc} = 2m^2 + 4m + 2$

左式=$\frac{2m+1}{m+1} > \frac{2m+2}{m+2} =$ 右式

∴　此公式成立

(12) $1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \cdots + \mathrm{n}(\mathrm{n}+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

第一步　n=1

左式 $= 1 \times 3 = 3$

右式 $= \dfrac{1(2)(2+7)}{6} = \dfrac{2 \times 9}{6} = 3$

∴　此公式在 n=1 時成立

第二步　假設$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \cdots + \mathrm{m}(\mathrm{m}+2) = \frac{m(m+1)(2m+7)}{6}$

我們要證明

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \cdots + (\mathrm{m}+1)(\mathrm{m}+3) = \frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}$$

左式 $= \dfrac{m(m+1)(2m+7)}{6} + (\mathrm{m}+1)(\mathrm{m}+3)$

$$=\frac{m(m+1)(2m+7)+6(m+1)(m+3)}{6}=\frac{(m+1)(2m^2+7m+6m+18)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(2m^2+13m+18)}{6}=\frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}=右式$$

∴　此公式成立

(13) $\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$

第一步　n=1

$$左式=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{6}$$

$$右式=\frac{1}{2(3)}=\frac{1}{6}$$

∴　此公式在 n=1 時成立

第二步　假設$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(m+1)(m+2)}=\frac{m}{2(m+2)}$

我們要證明

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(m+2)(m+3)}=\frac{(m+1)}{2(m+3)}$$

$$左式=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}$$

$$=\frac{m}{2(m+2)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}=\frac{m(m+3)+2}{2(m+2)(m+3)}=\frac{m^2+3m+2}{2(m+2)(m+3)}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)}{2(m+2)(m+3)}=\frac{m+1}{2(m+3)}=右式$$

∴　此公式成立

(14) 求證5^n+3 是 4 的倍數

第一步　n=1

$5^1+3=8$ 是 4 的倍數

∴　此命題在 n=1 時成立

第二步　假設$5^m+3=4\mathrm{h}$

我們要證明$5^{m+1}+3=4h'$

∵　$5^{\mathrm{m}}+3=4\mathrm{h}$

$\therefore 5^m=4h-3$

$5^{m+1}+3=5\cdot 5^m+3=5(4h-3)+3=20h-15+3=20h-12$
$=4(5h-3)$

∴　此公式成立

(15) 試證$3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$是 17 的倍數

第一步　n=1

$3\cdot 5^{2+1}+2^{3+1}=3\cdot 5^3+2^4=3\times 125+16=375+16=391=17\times 23$

∴　此命題在 n=1 時成立

第二步　假設$3\cdot 5^{2m+1}+2^{3m+1}=17K$

我們要證明$3\cdot 5^{2(m+1)+1}+2^{3(m+1)+1}=17K'$

左式 $=3\cdot 5^{(2m+3)}+2^{3m+4}=3\cdot 5^2(5^{2m+1})+2^3(2^{3m+1})$
$=3\cdot 25(5^{2m+1})+8(2^{3m+1})$
$=25(3\cdot 5^{2m+1}+2^{3m+1})-25\cdot 2^{3m+1}+8\cdot 2^{3m+1}$
$=25(3\cdot 5^{2m+1}+2^{3m+1})-(25-8)2^{3m+1}$
$=25(17K)-17(2^{3m+1})=17(25K-2^{3m+1})=17(K')=$ 右式

∴ 此命題成立

(16) $3^{4n+2}+5^{2n+1}$是 14 的倍數

第一步 n=1

$3^{4n+2}+5^{2n+1}=3^6+5^3=729+125=854=14(61)$

∴ 此命題在 n=1 時成立

第二步 假設$3^{4m+2}+5^{2m+1}=14K$

我們要證明$3^{4(m+1)+2}+5^{2(m+1)+1}=3^{4m+6}+5^{2m+3}=14K'$

左式 $=3^{4m+6}+5^{2m+3}=3^4(3^{4m+2})+5^2(5^{2m+1})=81(3^{4m+2})+25(5^{2m+1})$
$=81(3^{4m+2}+5^{2m+1})-81(5^{2m+1})+25(5^{2m+1})$
$=81(14K)-(81-25)(5^{2m+1})=81(14K)-56(5^{2m+1})$
$=14(81K-4(5^{2m+1}))=14K'=$ 右式

∴ 此公式成立

(17) $9^{n+1}-8\mathrm{n}-9$ 為 4 的倍數

第一步 n=1

$9^2-8-9=81-8-9=64=4\times 16$

∴ 此命題在 n=1 時成立
第二步 假設$9^{n+1}-8\mathrm{n}-9=4\mathrm{h}$

我們要證明$9^{n+2}-8(\mathrm{n}+1)-9=9^{n+2}-8n-17=4h'$

左式 $=9^{n+2}-8n-8-9=9(9^{n+1}-8n-9)-8+64n+72$
$=9(4h)+64n+64=9(4h)+64(n+1)=4(9h+16(n+1))=4h'$

∴ 此命題成立

(18) 試證$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$是 9 的倍數

第一步　n=1

$1^3+2^3+3^3=1+8+9=18=9\times 2$

∴　此命題在 n=1 時成立

第二步　假設$m^3+(m+1)^3+(m+2)^3=9K$

我們要證明$(m+1)^3+(m+2)^3+(m+3)^3=9K'$

∵　$m^3+(m+1)^3+(m+2)^3=9K$

∴　$(m+1)^3+(m+2)^3=9K-m^3$

∴ 左式 $=9K-m^3+(m+3)^3=9K-m^3+(m^3+9m^2+27m+27)$
$=9K+9m^2+27m+27=9(K+m^2+3m+3)=9K'$

∴　此命題成立

(19) 試證 n>2，$5^n>3^n+4^n$

第一步　n=3

$5^n=5^3=125$

$3^n+4^n=3^3+4^3=27+64=91$
125>91

∴　此命題在 n=3 時成立

第二步　假設$5^m>3^m+4^m$

我們要證明$5^{m+1}>3^{m+1}+4^{m+1}$

左式 $=5^{m+1}=5(5^m)>5(3^m+4^m)$

右式 $=3^{m+1}+4^{m+1}=3(3^m)+4\cdot 4^m=3(3^m+4^m)+4^m$

我們現在要比較$5(3^m+4^m)$和 $3(3^m+4^m)+4^m$

$5(3^m+4^m)-3(3^m+4^m)-4^m=2(3^m+4^m)-4^m=2\cdot 3^m+4^m>0$

$\therefore\ 5(3^m+4^m)>3(3^m+4^m)+4^m$

$\therefore\ 5^{m+1}>3^{m+1}+4^{m+1}$

$\therefore$ 此命題成立