

(40) 等差級數

請看以下的數列：

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

我們可以看出， $a_i - a_{i-1}$ 都等於 2，比方說 $a_7 - a_6 = 13 - 11 = 2$ ， $a_4 - a_3 = 7 - 5 = 2$ ，這個數列是一個等差數列。

等差級數有一個首項 a_1 和公差 d ，而且 $a_i - a_{i-1} = d$

或者說

$$a_{i+1} = a_i + d \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$(1) a_1 = 2, d = 3$$

$$a_2 = 2 + 3 = 5$$

$$a_3 = 5 + 3 = 8$$

$$a_4 = 8 + 3 = 11$$

$$a_5 = 11 + 3 = 14$$

3, 5, 8, 11, 14 是一個等差級數

$$(2) a_1 = 1, d = -2$$

$$a_2 = 1 - 2 = -1$$

$$a_3 = -1 - 2 = -3$$

$$a_4 = -3 - 2 = -5$$

$$a_5 = -5 - 2 = -7$$

$\therefore 1, -1, -3, -5, -7$ 是一等差級數

$$(3) a_1 = 0, d = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_5 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ 是一等差級數

$$(4) a_1 = 1, d = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$a_4 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$a_6 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$a_7 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

$\therefore 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2$ 是一等差級數

我們有另一種方法來給等差級數下定義，請看以下的式子

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

由此我們可以得到

$$a_i = a_1 + (i - 1)d \dots\dots\dots (2)$$

$$(5) a_1 = 2, d = 3$$

$$a_4 = 2 + (4 - 1) \times 3 = 2 + 9 = 11$$

我們也可以計算一下來驗證

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 + 3 = 5$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$(6) a_1 = -1, d = -2$$

$$a_5 = -1 + (5 - 1) \times (-2) = -1 + 4 \times (-2) = -1 - 8 = -9$$

驗證

$$a_1 = -1$$

$$a_2 = -1 - 2 = -3$$

$$a_3 = -3 - 2 = -5$$

$$a_4 = -5 - 2 = -7$$

$$a_5 = -7 - 2 = -9$$

$$(7) a_1 = 1, d = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = 1 + (4 - 1) \times \left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

驗證

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$a_4 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$(8) a_1 = -2, d = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = -2 + (3 - 1) \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 - 1 = -3$$

驗證

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$a_3 = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

等差級數的首項也可以用公式註明的

$$(9) a_i = 2i + 1$$

這個數列如下：

$$a_1 = 2(1) + 1 = 3$$

$$a_2 = 2(2) + 1 = 5$$

$$a_3 = 2(3) + 1 = 7$$

$$a_4 = 2(4) + 1 = 9$$

$$a_5 = 2(5) + 1 = 11$$

以下是這個數列：

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$$

同學們一看就知道這是個等差級數，同學們一定會問，等差級數的首項和差 d 是什麼？

$$\text{因為 } a_i = 2i + 1$$

$$\therefore a_1 = 2(1) + 1 = 3$$

$$d = a_i - a_{i-1} = (2i + 1) - [2(i - 1) + 1] = 2i + 1 - 2i + 2 - 1 = 2$$

$$(10) \quad a_i = -2i + 1$$

$$a_1 = -2(1) + 1 = -1$$

$$a_2 = -2(2) + 1 = -3$$

$$a_3 = -2(3) + 1 = -5$$

$$a_4 = -2(4) + 1 = -7$$

以下是這個數列：

$$-1, -3, -5, -7, -9, -11, -13$$

這也是一個等差級數

$$a_1 = -2(1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$d = a_i - a_{i-1} = (-2i + 1) - [-2(i - 1) + 1] = -2i + 1 + 2i - 2 - 1 = -2$$

等差級數的和

假設 a_1, a_2, \dots, a_n 是一個等差級數，我們可以用

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

來代表這個等差級數的和

現在我們考慮 n 是偶數的等差級數

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	3	5	7	9	11	13	15

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$$

要求等差級數的和，我們可以如此做

$$\text{先求 } a_1 + a_n = a_1 + a_8 = 1 + 15 = 16$$

$$\text{再求 } a_2 + a_{n-1} = a_2 + a_7 = 3 + 13 = 16$$

$$\text{再看 } a_3 + a_{n-2} = a_3 + a_6 = 5 + 11 = 16$$

換句話說，我們可以說

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3}$$

如果一個等差級數的首項是 a_1 ，公差是 d ，則

$$a_i = a_1 + (i - 1)d \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{末項 } a_n = a_1 + (n - 1)d \dots\dots\dots (4)$$

假設 $a_1 = -2, d = 3, n = 7$

$$a_7 = a_1 + (7 - 1)d = (-2) + 6(3) = -2 + 18 = 16$$

假設 $a_1 = 1, d = \frac{1}{2}, n = 5$

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)d = 1 + 4 \times \frac{1}{2} = 1 + 2 = 3$$

假設 $a_1 = -1$, $d = -2$, $n = 4$

$$a_4 = a_1 + (4 - 1)d = -1 + 3(-2) = -1 - 6 = -7$$

以下的式子是很容易了解的：

$$a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + (n - 1)d) = 2a_1 + (n - 1)d$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_1 + (n - 2)d) = 2a_1 + (n - 1)d$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_1 + (n - 3)d) = 2a_1 + (n - 1)d$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_1 + 3d) + (a_1 + (n - 4)d) = 2a_1 + (n - 1)d$$

因此，我們可以將 a_1, a_2, \dots, a_n 分成 $\frac{n}{2}$ 份

$$(a_1, a_n)$$

$$(a_2, a_{n-1})$$

⋮

$$(a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1})$$

因為每一組的和都是一樣的，我們可以得到下列的式子：

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \cdots \cdots \cdots (5)$$

以上的討論，假設 n 是偶數，如果 n 是奇數， $\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ 仍然是成立的。

我們先看一個例子 $n=5$ ，

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	3	5	7	9

以上的數列是一個等差級數

$$\sum_{i=1}^5 a_i = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$\text{此時 } a_1 + a_n = a_1 + a_5 = 1 + 9 = 10$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_2 + a_4 = 3 + 7 = 10$$

但還有一個 $a_3 = 5$ ，我們知道

$$a_3 = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{a_1 + a_5}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5$$

$$\text{如果 } n \text{ 是奇數， } \frac{a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$\text{因為 } a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} \cdots = \frac{a_{n-1} + a_{n+3}}{2}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n a_i = (a_1 + a_n) \frac{n-1}{2} + \frac{a_1 + a_n}{2} = (a_1 + a_n) \left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \right) = (a_1 + a_n) \frac{n}{2}$$

因為 n 是奇數，我們也可以用以下的式子

$$\sum_{i=1}^n a_i = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) n \cdots \cdots (6)$$

也許大家會問 $\frac{a_1 + a_n}{2}$ 一定是偶數嗎？

要知道， $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$\therefore a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + (n - 1)d) = 2a_1 + (n - 1)d$$

但 $(n-1)$ 是偶數

$$\therefore a_1 + a_n = 2a_1 + 2hd$$

$\therefore a_1 + a_n$ 是偶數

(11)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	3	5	7	9	11

$n=6$ (偶數)

$$\sum_{i=1}^6 a_i = (a_1 + a_n) \frac{n}{2} = (1 + 11) \frac{6}{2} = (12)(3) = 36$$

同學們可以驗證這個結果

(12)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	3	5	7	9	11	13

$n=7$ (奇數)

$$\sum_{i=1}^7 a_i = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \frac{1 + 13}{2} \times 7 = 7 \times 7 = 49$$

同學們可以驗證這個結果

(13)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
-3	-5	-7	-9	-11	-13

$n=6$ (偶數)

$$\sum_{i=1}^6 a_i = (a_1 + a_6) \frac{6}{2} = (-3 - 13) \frac{6}{2} = (-16) \frac{6}{2} = -48$$

(14)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
-2	0	2	4	6	8	10

$n=7$ (奇數)

$$\sum_{i=1}^7 a_i = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \left(\frac{-2 + 10}{2}\right) \times 7 = \frac{8}{2} \times 7 = 28$$

同學們可以看出公式(5)和公式(6)是一樣的，因此我們可以用以下的公式：

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \dots\dots\dots (7)$$

我們還有一些有趣的求和公式

$$\because a_1 = a_1, a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{i=1}^n a_i &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) \\ &= na_1 + \frac{n(n - 1)}{2}d \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

(15)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
-3	-5	-7	-9	-11	-13

$$a_1 = -3, d = -2, n = 6$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n a_i = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 6(-3) + \frac{6 \times 5}{2}(-2) = -18 - 30 = -48$$

我們也可以用公式(5)

$$\sum_{i=1}^6 a_i = (a_1 + a_6) \frac{n}{2} = (-3 - 13) \frac{6}{2} = (-16)3 = -48$$

(16)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
-2	0	2	4	6	8	10

$$a_1 = -2, d = 2, n = 7$$

$$\sum_{i=1}^7 a_i = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 7(-2) + \frac{7 \times 6}{2}(2) = -14 + \frac{42}{2}(2) = 28$$

我們也可以用公式(5)

$$\sum_{i=1}^7 a_i = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \left(\frac{-2 + 10}{2}\right) \times 7 = 4 \times 7 = 28$$

(17)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	2	3	4	5

$$a_1 = 1, d = 1, n = 5$$

$$\sum_{i=1}^5 a_i = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 5 \times 1 + \frac{5 \times 4}{2} \times 1 = 5 + 10 = 15$$

我們也可以用公式(5)

$$\sum_{i=1}^5 a_i = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \left(\frac{1 + 5}{2}\right) \times 5 = 3 \times 5 = 15$$

第 17 題給了我們一個有用的公式

$$a_1 = 1, d = 1$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

也可以直接用公式(5)

$$\sum_{i=1}^n a_i = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \frac{1 + n}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$$

各位同學應該記住這個公式

$$a_i = a_{i-1} + 1, a_1 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{100} a_i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$\sum_{i=1}^5 a_i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

我們現在繼續討論等差級數的和

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ &= \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

我們可以利用公式(7)來計算等差級數的和

$$(18) \quad a_1 = 1, d = 2$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n = \frac{2}{2}n^2 + \left(1 - \frac{2}{2}\right)n = n^2$$

假設等差級數是 1, 3, 5, 7, 9, 11, n=6

$$\sum_{i=1}^n a_i = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \frac{1 + 11}{2} \times 6 = 6 \times 6 = 36 = n^2$$

$$(19) \quad a_1 = 1, d = -2$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n = \frac{-2}{2}n^2 + \left(1 + \frac{2}{2}\right)n = -n^2 + 2n$$

這個等差級數是 1, -1, -3, -5, -7, -9, -11

$$\sum_{i=1}^n a_i = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \frac{1 - 11}{2} \times 7 = \frac{-10}{2} \times 7 = -35$$

$$-n^2 + 2n = -(7)^2 + 2 \times 7 = -49 + 14 = -35$$

公式(7)也給了我們一個新的想法，對任何 $an^2 + bn$ 而言，我們都可以說

$$an^2 + bn = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

$$\frac{d}{2} = a \quad \therefore d = 2a$$

$$\left(a_1 - \frac{d}{2}\right) = b \quad \therefore a_1 = \frac{d}{2} + b = a + b$$

也就是說，任何一個 $an^2 + bn$ 都對應一個等差級數

$$d = 2a, a_1 = a + b \dots\dots\dots (10)$$

$$(20) \quad an^2 + bn = n^2$$

$$a=1, b=0$$

$$\therefore d = 2a = 2$$

$$a_1 = a + b = 1$$

等差級數是 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

同學們可以自行驗證 $\sum_{i=1}^n a_i = n^2$

$$(21) \quad an^2 + bn = -n^2 + 2n$$

$$a=-1, b=2$$

$$d = 2a = -2$$

$$a_1 = a + b = -1 + 2 = 1$$

等差級數是 1, -1, -3, -5, -7, -9, -11

同學們可以自行驗證 $\sum_{i=1}^n a_i = -n^2 + 2n$