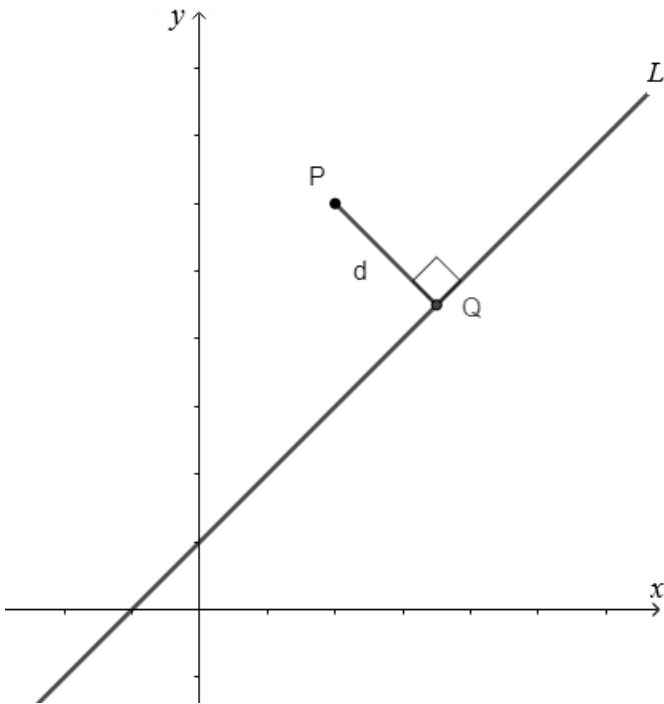


### (39)點與線的距離

請看下圖



上圖中，有一點  $P$  與一直線  $L$ 。在  $L$  上取一點  $Q$ ，使得  $\overline{PQ} \perp L$ 。 $\overline{PQ}$  的長度  $d$  就是  $P$  點到直線  $L$  的距離。

在一般教科書中， $L$  的方程式是  $ax+by+c=0$

假設  $P$  點的坐標  $(x_0, y_0)$ ，則  $P$  點到直線  $L$  的距離  $d$  是：

$$d = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \dots\dots(39.1)$$

而我們所使用的直線方程式是  $y = ax + b$

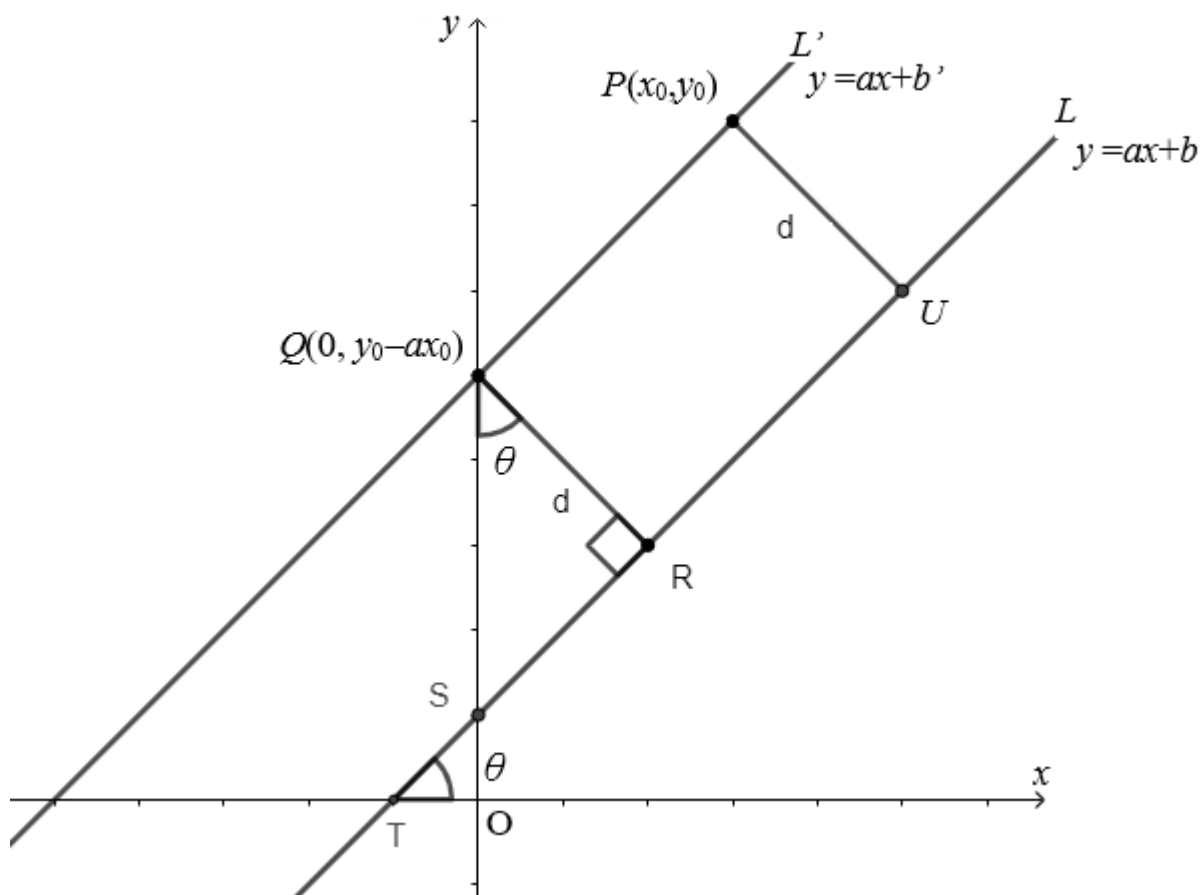
如果使用這個方程式，則  $P$  點到直線  $L$  的距離  $d$  是：

$$d = \left| \frac{y_0 - ax_0 - b}{\sqrt{1 + a^2}} \right| \dots\dots(39.2)$$

以下我們用三種不同的方法來導出(39.2)

## 方法(1)：幾何法

請看下圖



我們先作一條通過  $P=(x_0, y_0)$  且與  $y = ax + b$  平行的直線  $L'$

因為  $L'$  與  $y = ax + b$  平行，我們可以設  $L'$  的直線方程式為  $y = ax + b'$

因為  $P=(x_0, y_0)$  在  $L'$  上，所以

$$y_0 = ax_0 + b'$$

$$\rightarrow b' = y_0 - ax_0$$

$L'$  的直線方程式是  $y = ax + (y_0 - ax_0)$ .....(39.3)

$L'$  與  $y$  軸交於  $Q$  點， $Q=(0, y_0 - ax_0)$

$L$  與  $y$  軸交於  $S$  點， $S=(0, b)$

$$\overline{QS} = y_0 - ax_0 - b$$

過  $Q$  作一直線與  $L$  垂直，此直線與  $L$  交於  $R$  點，則  $\overline{QR}$  就是  $P$  與  $L$  的距離，因為  $L' \parallel L$ ，而且  $\overline{QR} \parallel \overline{PU}$ 。

$\triangle QSR$  和  $\triangle TSO$  相似，因此  $\angle SQR = \angle STO = \theta$

$\triangle QSR$  中， $\overline{QR} = \overline{QS} \cos \theta = (y_0 - ax_0 - b) \cos \theta \dots\dots(39.4)$

$\tan \theta = a$

$$\therefore 1 + \tan^2 \theta = 1 + a^2 = \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \dots\dots(39.5)$$

代(39.5)到(39.4)，得

$$\overline{QR} = (y_0 - ax_0 - b) \cos \theta = \frac{y_0 - ax_0 - b}{\sqrt{1+a^2}}$$

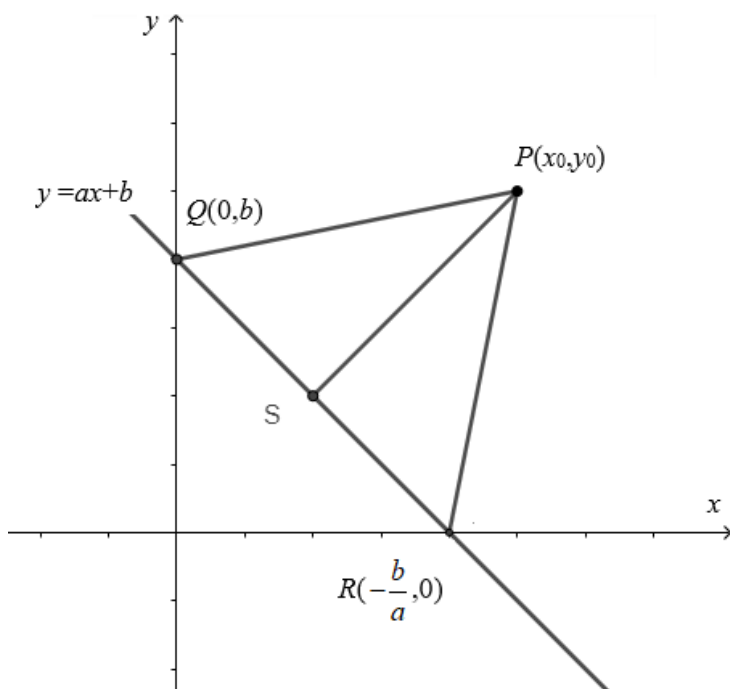
因為  $y_0 - ax_0 - b$  之值可能為負，求距離  $d$  時我們應該取絕對值

$$d = \overline{QR} = \left| \frac{y_0 - ax_0 - b}{\sqrt{1+a^2}} \right|$$

因此我們導出了(39.2)

## 方法(2)：三角形面積法

請看下圖



$y = ax + b$  與  $y$  軸和  $x$  軸分別交於  $Q$ 、 $R$  兩點，其中  $Q = (0, b)$ ， $R = (-\frac{b}{a}, 0)$

$\triangle PQR$  的三頂點分別是：

$$P(x_0, y_0)、Q(0, b)、R(-\frac{b}{a}, 0)$$

如果三角形三點為  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ 、 $(x_3, y_3)$ ，則面積為

$$\frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

代入  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  三點

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left| x_0(b - 0) + 0(-\frac{b}{a} - y_0) + (-\frac{b}{a})(y_0 - b) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| bx_0 - \frac{b}{a}y_0 + \frac{b^2}{a} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| (-\frac{b}{a})(y_0 - ax_0 - b) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{b}{a}(y_0 - ax_0 - b) \right| \end{aligned}$$

根據畢式定理， $\overline{QR} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + b^2} = \frac{b}{a}\sqrt{1+a^2}$

又 $\triangle PQR$ 的面積是 $\frac{1}{2}\overline{PS} \times \overline{QR}$ ，所以可以列出：

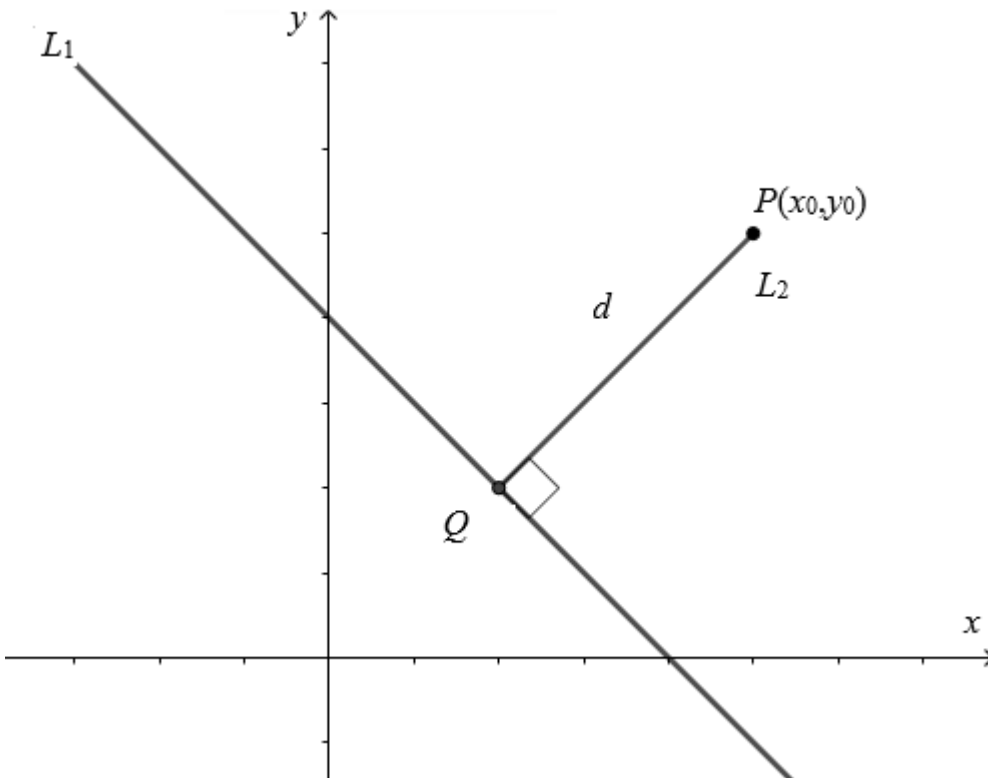
$$\frac{1}{2} \left| \frac{b}{a}(y_0 - ax_0 - b) \right| = \frac{1}{2} \overline{PS} \times \frac{b}{a} \sqrt{1+a^2}$$

$$\overline{PS} = \left| \frac{y_0 - ax_0 - b}{\sqrt{1+a^2}} \right|$$

$\overline{PS}$  就是  $P$  點到直線  $L$  的距離

### 方法(3)：向量法

請看下圖



如上圖， $L_2$ 是通過 $P$ 且與 $L_1$ 垂直的直線， $L_1$ 與 $L_2$ 相交於 $Q$ ，因此 $\overline{PQ}=d$ 是 $P$ 點到 $L_1$ 的距離。

$L_1$ 的方程式是 $y=ax+b$

其中 $a$ 是 $L_1$ 的斜率。因為 $L_2$ 與 $L_1$ 垂直，所以 $L_2$ 的斜率是 $-\frac{1}{a}$ 。

$L_2$ 的方程式可以寫成是 $y=-\frac{1}{a}x+c$

因為 $P(x_0, y_0)$ 在 $L_2$ 上，所以

$$y_0 = -\frac{1}{a}x_0 + c$$

$$c = y_0 + \frac{1}{a}x_0$$

所以 $L_2$ 的方程式可以寫成 $y = -\frac{1}{a}x + y_0 + \frac{1}{a}x_0$

我們現在有聯立方程式：

$$\begin{cases} y = ax + b \dots\dots(39.6) \\ y = -\frac{1}{a}x + y_0 + \frac{1}{a}x_0 \dots\dots(39.7) \end{cases}$$

將(39.6)代入(39.7)，得

$$\begin{aligned} ax + b &= -\frac{1}{a}x + y_0 + \frac{1}{a}x_0 \\ ax + \frac{1}{a}x &= y_0 + \frac{1}{a}x_0 - b \\ (a + \frac{1}{a})x &= y_0 + \frac{1}{a}x_0 - b \\ (a^2 + 1)x &= ay_0 + x_0 - ab \\ x &= \frac{ay_0 + x_0 - ab}{a^2 + 1} \dots\dots(39.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{ay_0 + x_0 - ab}{a^2 + 1} - x_0 \\ &= \frac{ay_0 + x_0 - ab}{a^2 + 1} - \frac{(a^2 + 1)x_0}{a^2 + 1} \\ &= \frac{ay_0 + x_0 - ab}{a^2 + 1} - \frac{a^2x_0 + x_0}{a^2 + 1} \\ &= \frac{ay_0 - a^2x_0 - ab}{a^2 + 1} \\ &= \frac{a(y_0 - ax_0 - a)}{a^2 + 1} \dots\dots(39.9) \end{aligned}$$

將(39.8)代入(39.7)，得

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{a}\left(\frac{ay_0 + x_0 - ab}{a^2 + 1}\right) + y_0 + \frac{1}{a}x_0 \\&= \frac{-y_0 - \frac{1}{a}x_0 + b}{a^2 + 1} + \frac{(a^2 + 1)\left(y_0 + \frac{1}{a}x_0\right)}{a^2 + 1} \\&= \frac{-y_0 - \frac{1}{a}x_0 + b + a^2y_0 + ax_0 + y_0 + \frac{1}{a}x_0}{a^2 + 1} \\&= \frac{a^2y_0 + ax_0 + b}{a^2 + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y - y_0 &= \frac{a^2y_0 + ax_0 + b}{a^2 + 1} - y_0 \\&= \frac{a^2y_0 + ax_0 + b}{a^2 + 1} - \frac{(a^2 + 1)y_0}{a^2 + 1} \\&= \frac{a^2y_0 + ax_0 + b - a^2y_0 - y_0}{a^2 + 1} \\&= \frac{-(y_0 - ax_0 - b)}{a^2 + 1} \dots\dots(39.10)\end{aligned}$$



根據畢式定理  $\overline{PQ} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

將(39.9)和(39.10)代入

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \sqrt{\left(\frac{a(y_0 - ax_0 - b)}{a^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{-(y_0 - ax_0 - b)}{a^2 + 1}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2(y_0 - ax_0 - b)^2}{(a^2 + 1)^2} + \frac{(y_0 - ax_0 - b)^2}{(a^2 + 1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2(y_0 - ax_0 - b)^2 + (y_0 - ax_0 - b)^2}{(a^2 + 1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(a^2 + 1)(y_0 - ax_0 - b)^2}{(a^2 + 1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(y_0 - ax_0 - b)^2}{a^2 + 1}} \\ &= \left| \frac{y_0 - ax_0 - b}{\sqrt{a^2 + 1}} \right|\end{aligned}$$

我們證明了  $P$  點到直線  $L_1$  的距離

**例 1：**直角坐標平面上有直線  $L: y=x$  和一點  $P(0,2)$ ，試求  $P$  和  $L$  的距離。

解答：

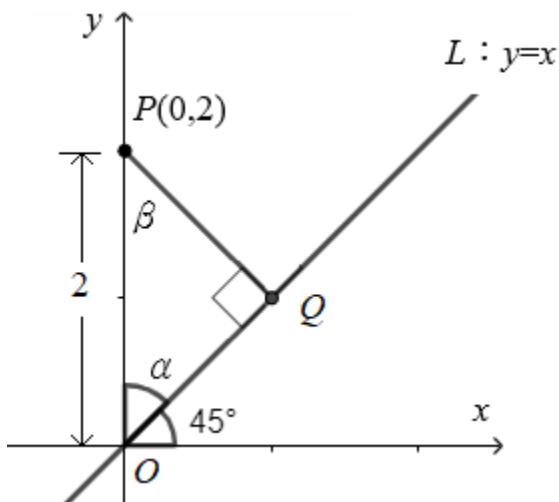
$$\text{利用公式 } d = \left| \frac{y_0 - ax_0 - b}{\sqrt{1+a^2}} \right|$$

根據題意， $a=1$ 、 $b=0$ 、 $x_0=0$ 、 $y_0=2$

$P$  和  $L$  的距離為：

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2 - 1 \times 0 - 0}{\sqrt{1+1^2}} \right| \\ &= \left| \frac{2}{\sqrt{2}} \right| \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

我們可以用幾何方式來驗證這公式得到的答案是正確的



我們可以發現  $\alpha = \beta = 45^\circ$

$$\therefore \overline{PQ} = \overline{OQ}$$

$$\overline{PO}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 = 2\overline{PQ}^2$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\frac{1}{2}\overline{PO}^2} = \sqrt{\frac{1}{2}2^2} = \sqrt{2}$$

例 2：直角坐標平面上有直線  $L: y=-x+1$  和一點  $P(1,1)$ ，試求  $P$  和  $L$  的距離。

解答：

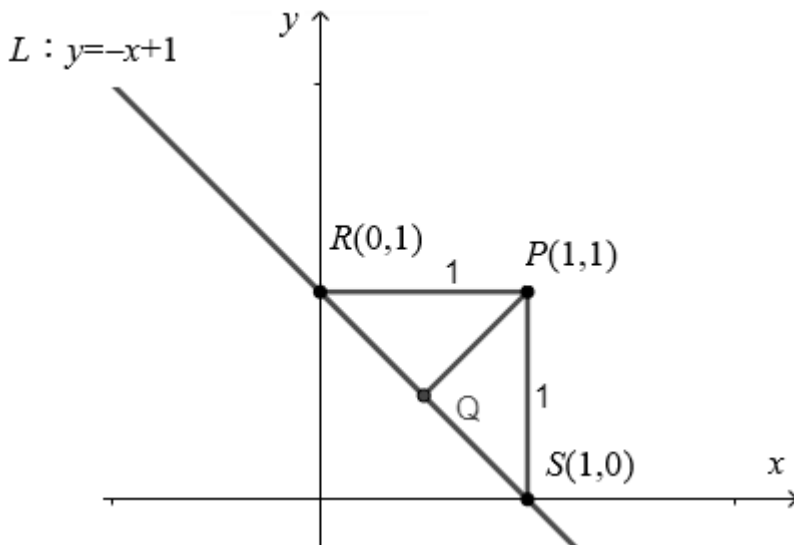
$$\text{利用公式 } d = \left| \frac{y_0 - ax_0 - b}{\sqrt{1+a^2}} \right|$$

根據題意， $a=-1$ 、 $b=1$ 、 $x_0=1$ 、 $y_0=1$

$P$  和  $L$  的距離為：

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1 - (-1 \times 1) - 1}{\sqrt{1 + (-1)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

我們可以用幾何方式來驗證這公式得到的答案是正確的



$\triangle PRS$  是一個等腰三角形，，所以  $\overline{PQ}$  平分  $\overline{RS}$

$\therefore Q$  的坐標為  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (1 - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**例 3：**直角坐標平面上有直線  $L: y=-3x+5$  和一點  $P(2,5)$ ，試求  $P$  和  $L$  的距離。

解答：

$$\text{利用公式 } d = \left| \frac{y_0 - ax_0 - b}{\sqrt{1+a^2}} \right|$$

根據題意， $a=-3$ 、 $b=5$ 、 $x_0=2$ 、 $y_0=5$

$P$  和  $L$  的距離為：

$$\begin{aligned} & \left| \frac{5 - (-3) \times 2 - 5}{\sqrt{1 + (-3)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{6}{\sqrt{10}} \right| \\ &= \frac{6}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

**例 4：**直角坐標平面上有直線  $L: y=3$  和一點  $P(2,6)$ ，試求  $P$  和  $L$  的距離。

解答：

$$\text{利用公式 } d = \left| \frac{y_0 - ax_0 - b}{\sqrt{1+a^2}} \right|$$

根據題意， $a=0$ 、 $b=3$ 、 $x_0=2$ 、 $y_0=6$

$P$  和  $L$  的距離為：

$$\begin{aligned} & \left| \frac{6 - 0 \times 2 - 3}{\sqrt{1 + 0^2}} \right| \\ &= \left| \frac{3}{\sqrt{1}} \right| \\ &= 3 \end{aligned}$$

同學們可以很容易地看出這個答案是正確的

**例 5：**直角坐標平面上有直線  $L: x=3$  和一點  $P(5,2)$ ，試求  $P$  和  $L$  的距離。

解答：

這次我們換一個公式

當  $L$  的方程式是  $ax+by+c=0$ ， $P$  點的坐標是  $(x_0, y_0)$ ，則  $P$  點到直線  $L$  的距離  $d$  是：

$$d = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

$x=3$  可以寫成  $x+0y-3=0$

所以  $a=1$ 、 $b=0$ 、 $c=-3$ 、 $x_0=5$ 、 $y_0=2$

$P$  和  $L$  的距離為：

$$\begin{aligned} & \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \\ &= \left| \frac{1 \times 5 + 0 \times 2 + (-3)}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \right| \\ &= \left| \frac{5 - 3}{\sqrt{1^2}} \right| \\ &= 2 \end{aligned}$$

同學們可以很容易地看出這個答案是正確的