

### (38)直線的一些特別性質

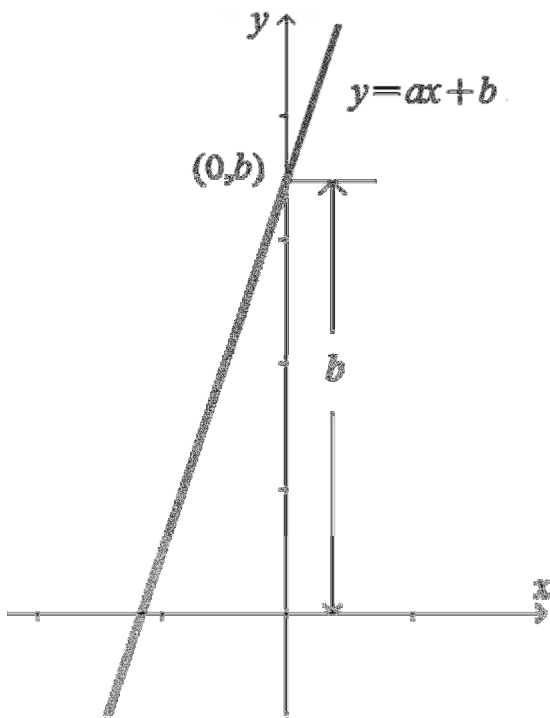
我們通常用  $y=ax+b$  來表示一條直線，現在我們看一下  $y=ax+b$  中的  $b$  有什麼意義。

令  $x=0$ ，我們就得到

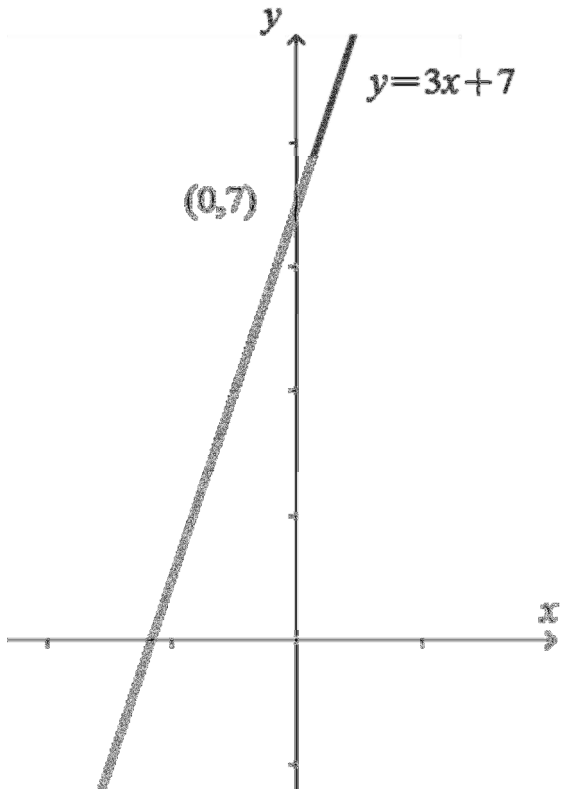
$$y=b$$

所以所謂的  $b$ ，其實表示  $y=ax+b$  和  $y$  軸的交點  $(0,b)$ 。換句話說， $|b|$

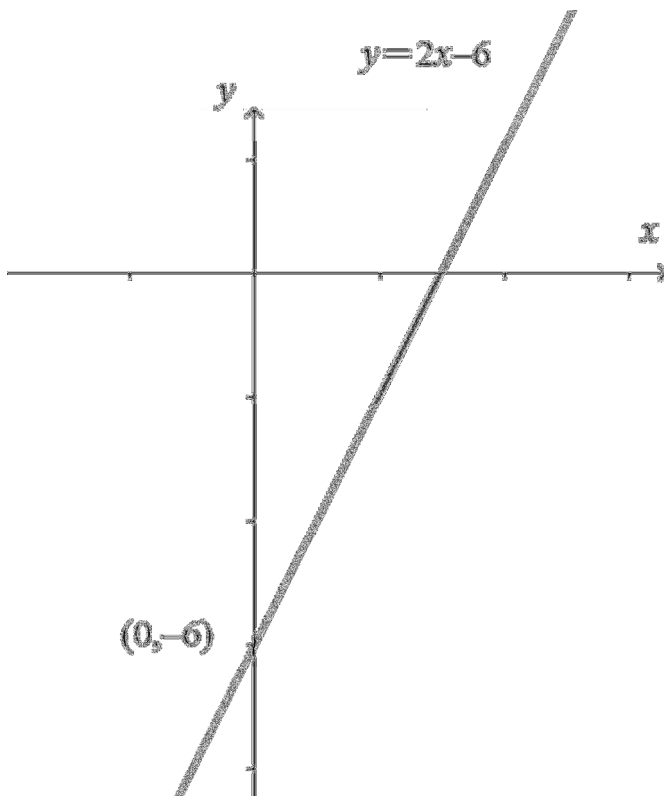
是  $y=ax+b$  在  $y$  軸上的高度。如下圖：



例 1：  $y=3x+7$

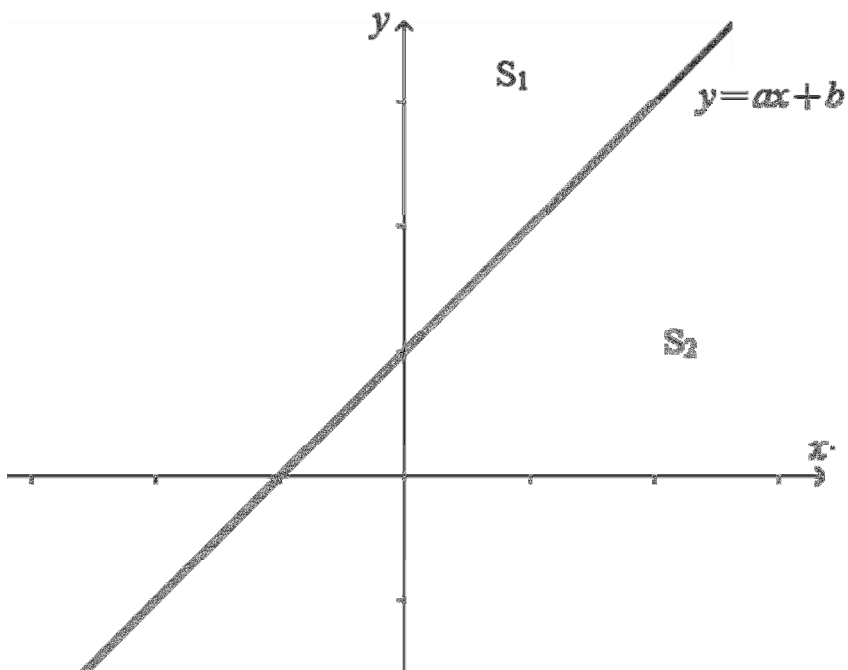


例 2：  $y = 2x - 6$



假設我們有一條直線  $y = ax + b$ ，這條直線將平面分成兩個半平面  $S_1$

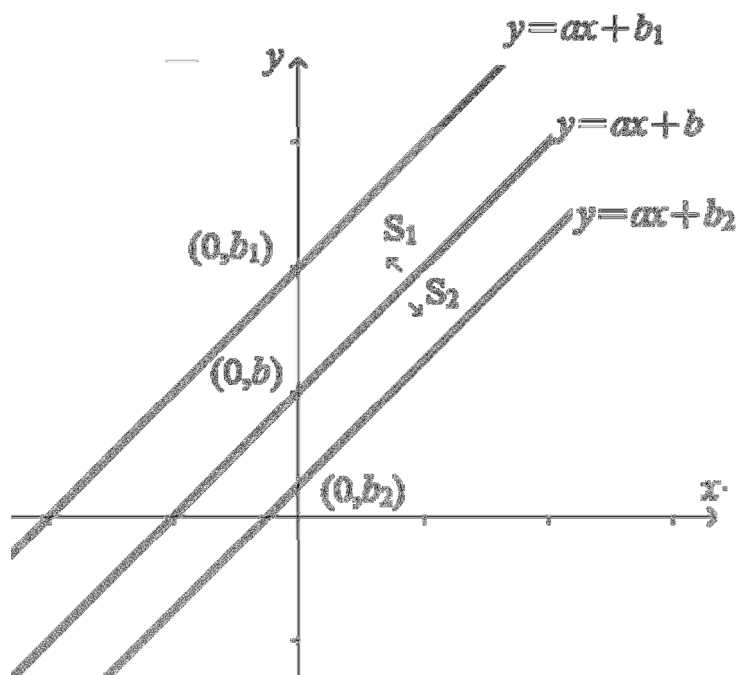
和  $S_2$ ，如下圖：



在  $S_1$ ，如果有一條直線  $y = ax + b_1$ ，則  $b_1 > b$ 。

在  $S_2$ ，如果有一條直線  $y = ax + b_2$ ，則  $b_2 < b$ 。

下圖可以解釋以上的敘述：



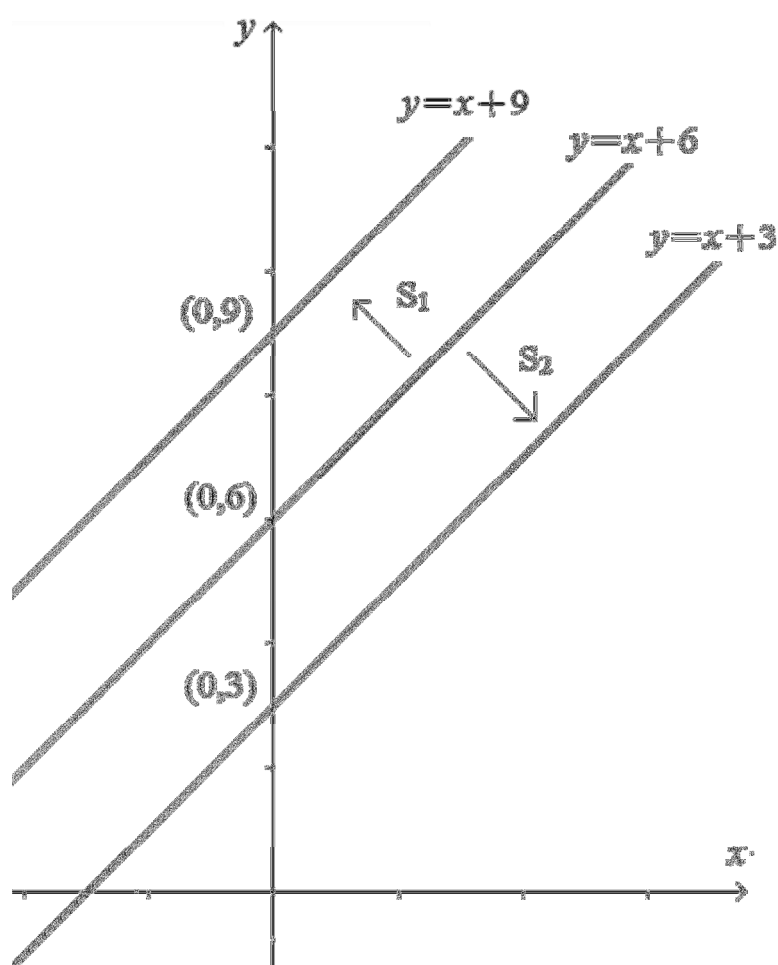
例 3： 有一直線  $y=x+6$ ，其上方為  $S_1$ ，下方為  $S_2$ 。

$y=x+9$ ，在  $S_1$  內，它與  $y$  軸交點為  $(0,9)$ 。

$y=x+6$ ，它與  $y$  軸交點為  $(0,6)$ 。

$y=x+3$ ，在  $S_2$  內，它與  $y$  軸交點為  $(0,3)$ 。

如下圖：



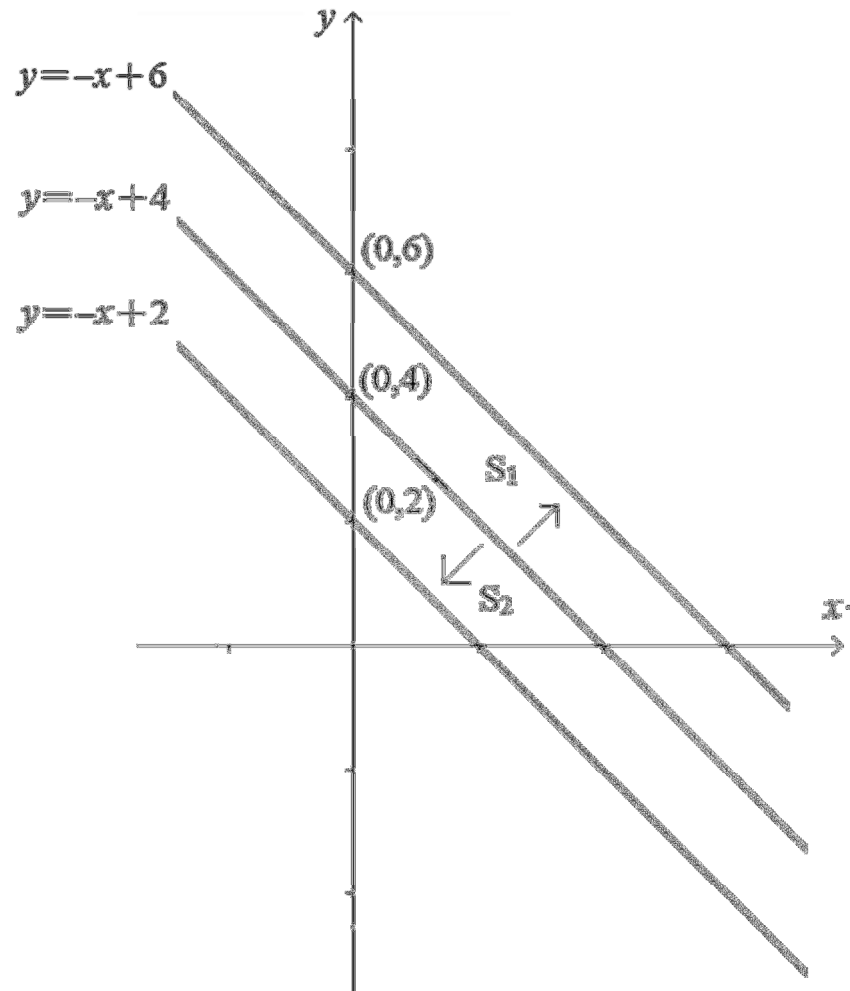
例 4： 有一直線  $y=-x+4$ ，其上方為  $S_1$ ，下方為  $S_2$ 。

$y=-x+6$ ，在  $S_1$  內，它與  $y$  軸交點為  $(0,6)$ 。

$y=-x+4$ ，它與  $y$  軸交點為  $(0,4)$ 。

$y = -x + 2$ ，在  $S_2$  內，它與  $y$  軸交點為  $(0, 2)$ 。

如下圖：



根據以上的討論，我們可以得到以下的結論：

(1) 假設點  $(x_0, y_0)$  在直線  $y = ax + b$  上，則

$$y_0 = ax_0 + b$$

$$\therefore y_0 - ax_0 = b$$

(2)  $y = ax + b$  將平面分成  $S_1$  和  $S_2$ 。

(3) 假設點  $(x_0, y_0)$  在  $S_1$ ，且在直線  $y = ax + b_1$  上，則

$$y_0 = ax_0 + b_1, \text{ 且 } b_1 > b。$$

$$\therefore y_0 - ax_0 = b_1 > b$$

(4) 假設點 $(x_0, y_0)$ 在 $S_2$ ，且在直線 $y = ax + b_2$ 上，則

$$y_0 = ax_0 + b_2, \text{ 且 } b_2 < b。$$

$$\therefore y_0 - ax_0 = b_2 < b$$

因此我們有以下的結論：

(1) 在 $S_1$ 內的任意點 $(x_0, y_0)$ ，滿足 $y_0 - ax_0 > b$

(2) 在 $S_2$ 內的任意點 $(x_0, y_0)$ ，滿足 $y_0 - ax_0 < b$

我們也可以做以下的結論：

(1) 如果點 $(x_0, y_0)$ 滿足 $y_0 - ax_0 > b$ ，則點 $(x_0, y_0)$ 在 $S_1$ 內。

(2) 如果點 $(x_0, y_0)$ 滿足 $y_0 - ax_0 < b$ ，則點 $(x_0, y_0)$ 在 $S_2$ 內。

例 5： 有一直線 $y = 3x + 4$

$$a = 3, b = 4$$

(1)  $(x_0, y_0) = (1, 7)$ 是直線 $y = 3x + 4$ 上的一點

$$\text{因為 } y_0 - ax_0 = 7 - 3 \times 1 = 4 = b = 4$$

(2)  $(x_0, y_0) = (1, 9)$ 在 $S_1$ 內，

$$\text{因為 } y_0 - ax_0 = 9 - 3 \times 1 = 6 > b = 4$$

(3)  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ 在 $S_2$ 內，

$$\text{因為 } y_0 - ax_0 = 2 - 3 \times 1 = -1 < b = 4$$

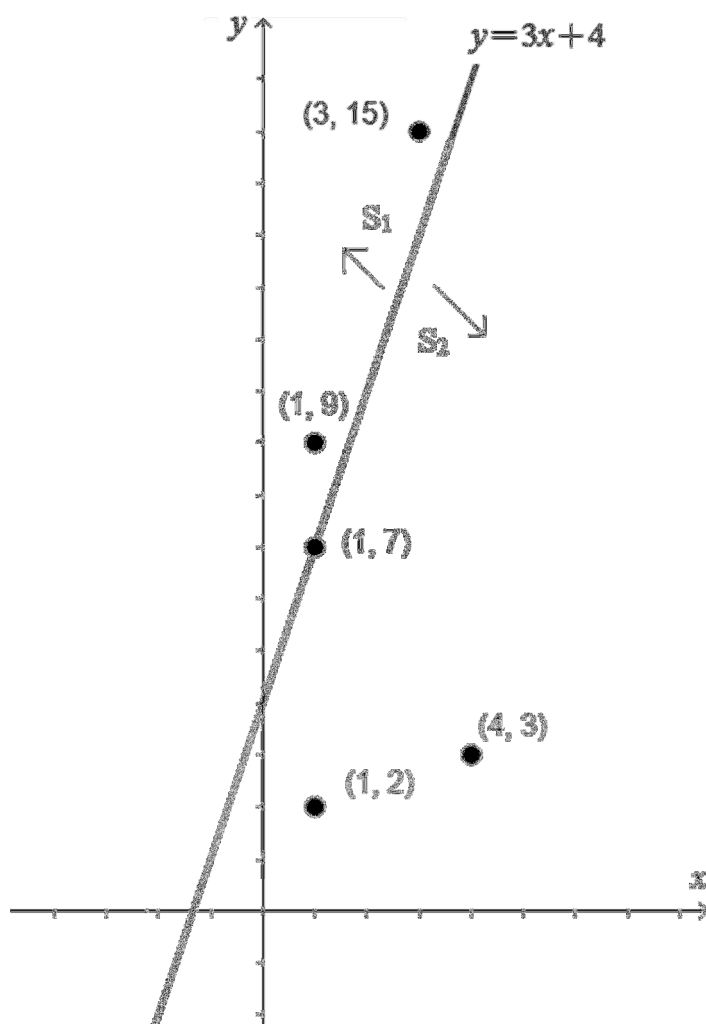
(4)  $(x_0, y_0) = (3, 15)$  在  $S_1$  內，

因為  $y_0 - ax_0 = 15 - 3 \times 3 = 9 > b = 4$

(5)  $(x_0, y_0) = (4, 3)$  在  $S_2$  內，

因為  $y_0 - ax_0 = 3 - 3 \times 4 = -9 < b = 4$

以上的直線和點如下圖：



例 6： 有一直線  $y = -2x + 5$

$a = -2$ 、 $b = 5$

(1)  $(x_0, y_0) = (2, 1)$  是直線  $y = -2x + 5$  上的一點

因為  $y_0 - ax_0 = 1 - (-2) \times 2 = 5 = b = 5$

(2)  $(x_0, y_0) = (-2, 10)$  在  $S_1$  內，

因為  $y_0 - ax_0 = 10 - (-2) \times (-2) = 6 > b = 5$

(3)  $(x_0, y_0) = (-2, 2)$  在  $S_2$  內，

因為  $y_0 - ax_0 = 2 - (-2) \times (-2) = -2 < b = 5$

(4)  $(x_0, y_0) = (0, 5)$  是直線  $y = -2x + 5$  上的一點

因為  $y_0 - ax_0 = 5 - (-2) \times 0 = 5 = b = 5$

以上的直線和點如下圖：

