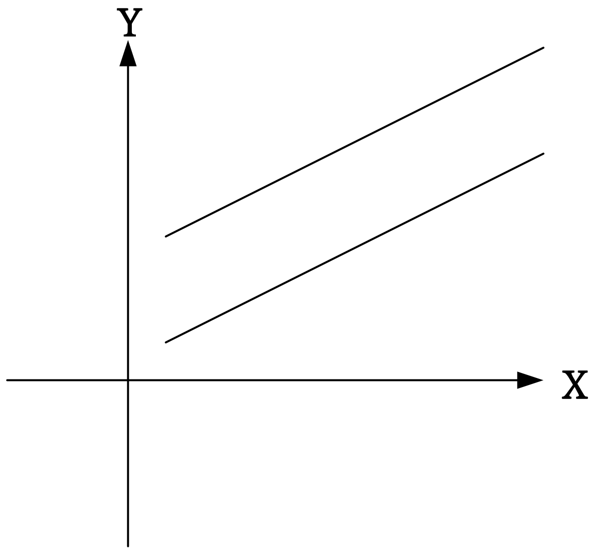
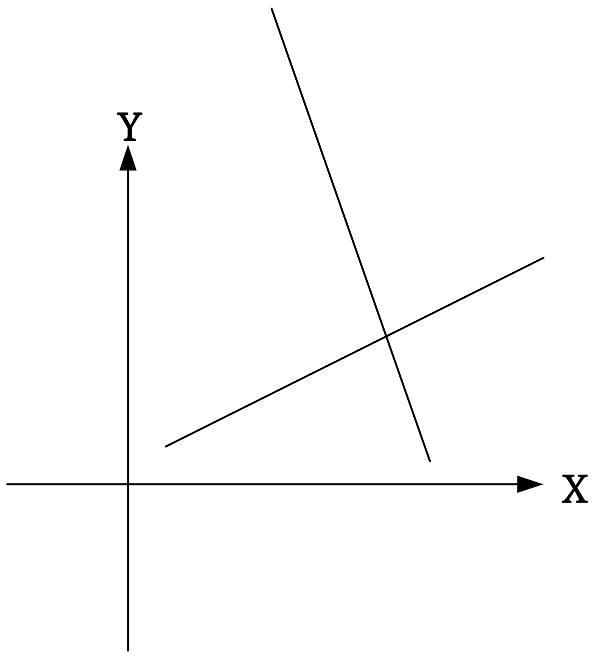
(37)直線與向量

同學們一定已經對直線有觀念了，我們在過去常說"兩點決定一條線"，這是正確的，但是現在我們又學會了向量，我們可以將直線和向量連接起來了。

請看下圖，這張圖中有兩條直線，大家一定會認為這兩條線是平行的。為什麼平行?理由很簡單，它們的方向都是相同的。



再看下圖，這張圖中也有兩條線，一看就知道這兩條直線相交，因為它們的方向是不同的。



假設有一條直線，$(x_1,\ y_1) = (3,1)$是線上的一點，$(x_2,\ y_2) = (5,6)$是線上的另一點。

$x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$

$y_2 - y_1 = 6 - 1 = 5$

因此我們可以知道這一條直線的方向可以用向量$\mathrm{v} = (v_x,\ v_y) = (2,5)$來代表，直線的方程式可以用以下的方程式來代表。

$\mathrm{x} = x_0 + tv_x = 3 + 2t$

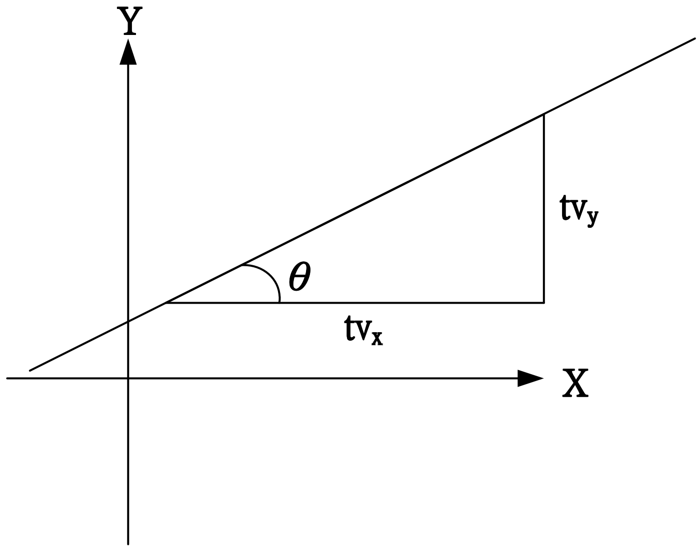
$\mathrm{y} = y_0 + tv_y = 1 + 5t$

以上式子中的 t 可以為任何實數，我們可以將這種直線的的表示方法稱之為參數表示法。

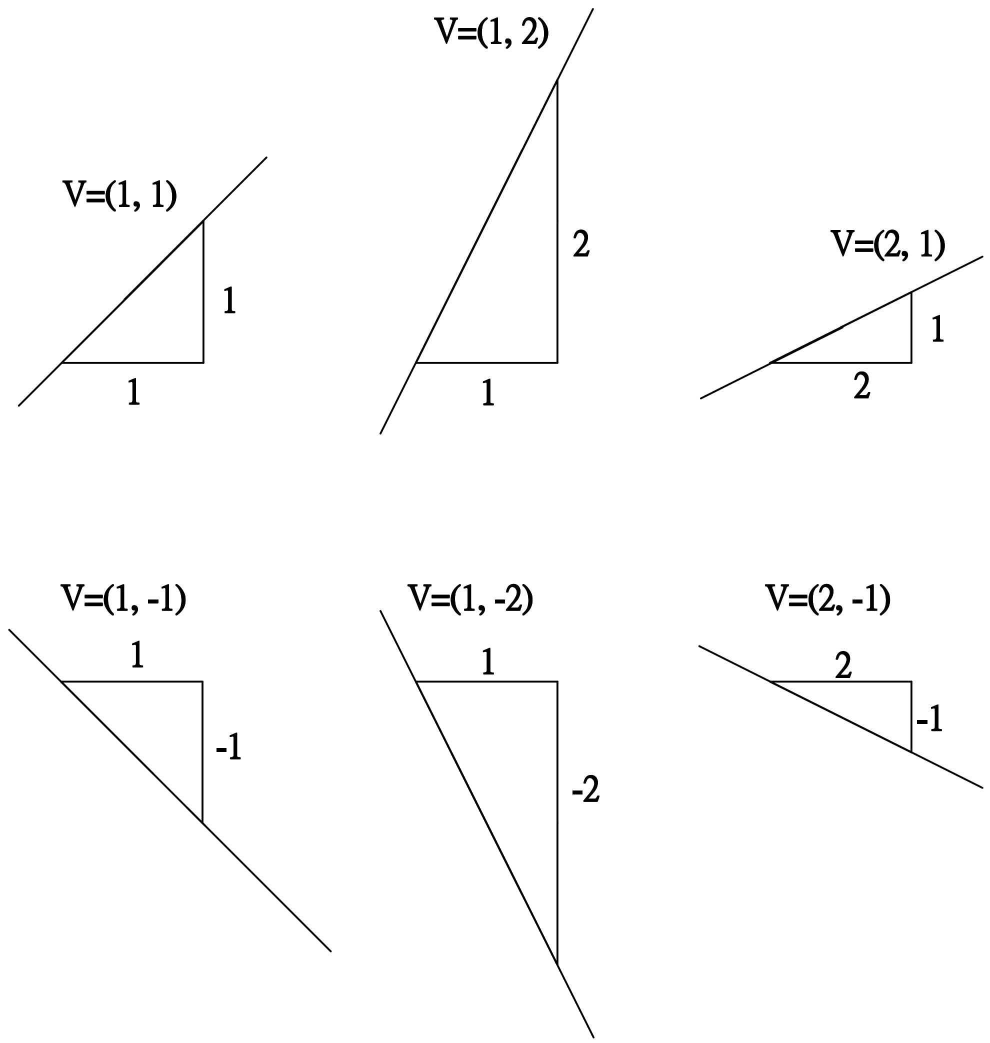
參數表示法的要義如下:

如果一條直線通過$(x_0,\ y_0)$，方向是$\mathrm{v} = (v_x,\ v_y)$，則此直線可由以下的方程式表示:

$\mathrm{x} = x_0 + tv_x \cdots\cdots\cdots (1)$
$\mathrm{y} = y_0 + tv_y \cdots\cdots\cdots (2)$
$\mathrm{v} = (v_x,\ v_y)$確定了直線的斜率，如下圖:



下圖顯示了各種方向向量的圖形:



同學們一定會有一個疑問，在過去，直線的方程式是 ax+by+c=0 或 y=ax+b，

現在參數直線方程式是

$\mathrm{x} = x_0 + tv_x$
$\mathrm{y} = y_0 + tv_y$

這兩種表示可以互換嗎?

先考慮參數直線表示法

$\mathrm{x} = x_0 + tv_x$
$\mathrm{y} = y_0 + tv_y$

$\because\ \mathrm{x} = x_0 + tv_x$

$\therefore\ t = \frac{x - x_0}{v_x}$

將$t = \frac{x-x_0}{v_x}$代入$y = y_0 + tv_y$，得

$y = y_0 + v_y(\frac{x - x_0}{v_x})$

$\therefore\ y = \frac{v_y}{v_x}x + y_0 - \frac{v_y}{v_x}x_0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

我們可以令

$\frac{v_y}{v_x} = a,\ y_0 - \frac{v_y}{v_x}x_0 = b$

第(3)式就是 y=ax+b

(1)直線通過$(x_0,\ y_0) = (2,\ 3),\ v = (v_x,\ v_y) = (1,\ 4)$

$x = x_0 + tv_x = 2 + t \cdots\cdots\cdots (1.1)$

$y = y_0 + tv_y = 3 + 4t \cdots\cdots\cdots (1.2)$

由(1.1)得

t=x-2………(1.3)

將(1.3)代入(1.2)，得

y=3+4(x-2)

∴ y=4x+3-8=4x-5………(1.4)

我們也可以直接用公式(3)

$y=\frac{v_y}{v_x}x+y_0-\frac{v_y}{v_x}x_0$

$y=\frac{4}{1}x+3-(\frac{4}{1})(2)$

y=4x+3-4(2)=4x+3-8=4x-5，和(1.4)相同

我們先要檢查$(x_0,\ y_0)=(2,\ 3)$是否在直線上

y=4x-5

令 x=2，$y=4\times 2-5=3$

∴ (2, 3)在 y=4x-5 上

y=4x-5 的斜率是 4，$v=(v_x,\ v_y)=(1,\ 4)$

∴ 斜率 $=\frac{v_y}{v_x}=\frac{4}{1}=4$

這幾乎是不用查的，因為公式(3)就是$y=\frac{v_y}{v_x}x+y_0-\frac{v_y}{v_x}x_0$

x 的係數是直線的斜率，所以這個公式滿足了原來關於直線方向的要求。

(2)直線通過$(x_0,\ y_0)=(3,-1)$, $v=(v_x,\ v_y)=(-2,\ 3)$

$x=x_0+tv_x=3+(-2)t=3-2t\cdots\cdots\cdots(2.1)$

$y=y_0+tv_y=-1+3t\cdots\cdots\cdots(2.2)$

我們直接用公式(3)

$y=\frac{v_y}{v_x}x+y_0-\frac{v_y}{v_x}x_0$

$y=(\frac{3}{-2})x+(-1)-(\frac{3}{-2})(3)$

$$y=-\frac{3}{2}x-1+\frac{9}{2}$$

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

我們可以檢查(3, -1)是否在此直線上

將 x=3 代入$y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

$$y=-\frac{3}{2}(3)+\frac{7}{2}=-\frac{9}{2}+\frac{7}{2}=-1$$

∴(3, -1)在$y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$上

(3)直線通過$(x_0, y_0)=(2, 3)$, $v=(v_x, v_y)=(2, 4)$

$x=x_0+tv_x=2+2t$

$y=y_0+tv_y=3+4t$

利用公式(3)

$$y=\frac{v_y}{v_x}x+y_0-\frac{v_y}{v_x}x_0$$

$$y=(\frac{4}{2})x+3-(\frac{4}{2})(2)$$

y=2x+3-4
y=2x-1

一條直線的方向可以用$v=(v_x, v_y)$來表示，這條直線的斜率是$\frac{v_y}{v_x}$，因此我們對任何一個$v=(v_x, v_y)$，都用(1, a)來表示，其中 a 就是$\frac{v_y}{v_x}$。

一旦 v=(1, a)，公式(3)就變得更簡單了，原來的直線方程式是

$y=\frac{v_y}{v_x}x+y_0-\frac{v_y}{v_x}x_0$

因為 v=(1, a)，而且$a=\frac{v_y}{v_x}$，我們可以得到以下的公式

$y=ax+y_0-ax_0\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)重做第(2)題

直線通過(3, -1)，原來的$v=(-2,\ 3)$，所得到的直線方程式是$y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

假如我們用$v=(1,a)=(1,\ \frac{3}{-2})=(1,\ \frac{-3}{2})$

由公式(4)，我們可得

$y=-\frac{3}{2}x+(-1)-(-\frac{3}{2})(3)$

$y=-\frac{3}{2}x-1+\frac{9}{2}$

$y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

我們用 v=(1, a)，得到的直線方程式是一樣的

(5)重做第(3)題

直線通過(2, 3)，$v=(2,\ 4)$，所得到的直線方程式是 y=2x-1

假如我們用$v=(1,a)=(1,\ \frac{4}{2})=(1,\ 2)$

則$y=ax+y_0-ax_0$

y=2x+3-2×2＝2x+3-4=2x-1

得到的答案和用$v=(2,\ 4)$是一樣的

在此以前，我們都是先知道參數直線表示法，然後可以求得直線方程式。在下面，我們要告訴同學，如果我們知道了直線方程式，也可以求得參數直線方程式的。

(6)直線方程式 y=5x-7

先求這個直線上的任一點，令 x=0，則 y=-7，所以$(x_0,\ y_0)=(0,\ -7)$是 y=5x-7 上的一點。

y=5x-7 表示此直線的斜率是 5，故$v=(1,\ 5)$

參數表示法的公式是
x=0+t
y=-7+5t

(7)直線方程式$y=-\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}$

令 x=1，$y=-\frac{2}{5}(1)+\frac{2}{3}=-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{-6+10}{15}=\frac{4}{15}$

$\therefore\ (x_0,\ y_0)=(1,\ \frac{4}{15})$在此直線上

$v=(1,-\frac{2}{5})$

∴參數表示法的方程式是

x=1+t………(7.1)

$y=\frac{4}{15}-\frac{2}{5}t\cdots\cdots\cdots(7.2)$

我們可以驗證做得對不對

由 7.1 得 t=x-1，將此代入 7.2

$$y=\frac{4}{15}-\frac{2}{5}(x-1)$$

$$y=\frac{4}{15}-\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}$$

$$y=-\frac{2}{5}x+\frac{4}{15}+\frac{2}{5}$$

$$y=-\frac{2}{5}x+\frac{4+6}{15}$$

$$y=-\frac{2}{5}x+\frac{10}{15}$$

$$y=-\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}$$

如果我們令 x=0，則$\mathrm{y}=\frac{2}{3}$ ， $\therefore(0,\ \frac{2}{3})$在此直線上，參數表示法的方程式是

x=0+t

$$\mathrm{y}=\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{5}\right)t$$

兩個方程式合併，可得

$$\mathrm{y}=\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{5}\right)x$$

$$\mathrm{y}=-\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}$$

(8)直線方程式 y=2x-9

令 x=0，y=-9，故$(x_0,\ y_0)=(0,\ -9)$在此直線上，$\mathrm{v}=(1,\ 2)$

x=0+t
y=-9+2t

兩方程式合併，

$y=-9+2x$

$y=2x-9$