

(32) 常用對數

現在的數字都用 10 進位，比方說，

$$35 = 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

$$472 = 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

對於對數，底數可以是任何值。為了方便起見，我們規定了以 10 為底數的對數為「常用對數」。常用對數的定義是 $\log_{10} X$ ，但為了簡化起見，常用對數可以省略對數，所以 $\log_{10} X = \log X$

$$(1) \log 10 = 1$$

$$(2) \log 100 = 2$$

$$(3) \log 1000 = 3$$

$$(4) \log \frac{1}{10} = -1$$

$$(5) \log \frac{1}{100} = -2$$

$$(6) \log \frac{1}{1000} = -3$$

10 這個數字有一些簡單且易於記憶如下：

$$(1) \text{如 } 0 < a < 1, 1 < 10^a < 10$$

$$(2) \text{如 } 1 < a < 2, 10 < 10^a < 100$$

$$(3) \text{如 } 2 < a < 3, 100 < 10^a < 1000$$

•
•
•

因此我們可以知道

$$(1) \text{如 } 0 < x < 10, 0 < \log x < 1$$

$$(2) \text{如 } 10 < x < 100, 1 < \log x < 2$$

$$(3) \text{如 } 100 < x < 1000, 2 < \log x < 3$$

各位同學用電腦裡的小算盤，可以算得以下的結果

- (7) $\log 3 = 0.477 < 1$
 (8) $\log 7 = 0.845 < 1$
 (9) $\log 30 = 1.477 = (1 + 0.477) < 2$
 (10) $\log 70 = 1.845 = (1 + 0.845) < 2$
 (11) $\log 300 = 2.477 = (2 + 0.477) < 3$
 (12) $\log 700 = 2.845 = (2 + 0.845) < 3$

同學們一定可以從以上的例子中看出

- (13) $\log 3 = 0.477$
 (14) $\log 30 = \log 3 \times 10 = \log 3 + \log 10 = 0.477 + 1 = 1.477$
 (15) $\log 300 = \log 30 \times 10 = \log 30 + \log 10 = 1.477 + 1 = 2.477$
 (16) $\log 7 = 0.845$
 (17) $\log 70 = \log 7 \times 10 = \log 7 + \log 10 = 0.845 + 1 = 1.845$
 (18) $\log 700 = \log 70 \times 10 = \log 70 + \log 10 = 1.845 + 1 = 2.845$

同學們可以看出常用對數 $\log X$ 的優點：

$$\log_{10} n = n \log 10 = n$$

換底公式

以下，我們要介紹一個換底公式，我們先看以下的式子：

$$(\log_b c)(\log_c a)$$

(19) 令 $b=2$ ， $c=4$ ， $a=16$
 $(\log_b c)(\log_c a) = (\log_2 4)(\log_4 16) = 2 \times 2 = 4$

同學們不妨注意 $\log_b a = \log_2 16 = 4$

(20) 令 $b=3$ ， $c=9$ ， $a=81$
 $(\log_b c)(\log_c a) = (\log_3 9)(\log_9 81) = 2 \times 2 = 4$

也請注意 $\log_b a = \log_3 81 = 4$

(21) 令 $b=2$ ， $c=8$ ， $a=64$

$$(\log_b c)(\log_c a) = (\log_2 8)(\log_8 64) = 3 \times 2 = 6$$

請注意 $\log_b a = \log_2 64 = 6$

以下我們要證明一個公式：

$$(\log_b c)(\log_c a) = (\log_b a)$$

證明如下：

$$(b^{\log_b c}) = c$$

$$\therefore (b^{\log_b c})^{\log_c a} = c^{\log_c a} = a = b^{\log_b a}$$

$$\therefore b^{(\log_b c)(\log_c a)} = b^{\log_b a}$$

$$\therefore (\log_b c)(\log_c a) = (\log_b a)$$

根據以上的公式，我們可以得到

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$

為何我們將以上的公式叫做換底公式呢？

假設我們只知道以 b 為底的對數，我們根據以 b 為底的對數，求得以 c 為底的倒數。

因為 b=10 很好用，我們通常用以下的換底公式

$$\log_c a = \frac{\log a}{\log c}$$

$$(22)c=2, a=8$$

$$\log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{0.9}{0.3} = 3$$

同學們知道這是正確的答案

$$(23)c=3, a=27$$

$$\log_3 27 = \frac{\log 27}{\log 3} = \frac{1.41}{0.47} = 3$$

正確的答案

$$(24)c=3, a=9$$

$$\log_3 9 = \frac{\log 9}{\log 3} = \frac{0.954}{0.477} = 2$$

正確的答案

$$(25)c=3, a=7$$

$$\log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} = \frac{0.84588}{0.477} = 1.77$$

我們可以利用小算盤得知

$$3^{1.77} = 6.9 \quad \text{很接近 7 了}$$

$$(26)c=5, a=15$$

$$\log_5 15 = \frac{\log 15}{\log 5} = \frac{1.17}{0.698} = 1.68$$

從小算盤可以查出

$$5^{1.68} = 14.93 \quad \text{很靠近 15 了}$$

$$(27)c=8, a=100$$

$$\log_8 100 = \frac{\log 100}{\log 8} = \frac{2}{0.903} = 2.21$$

從小算盤可以查出

$$8^{2.21} = 99.04 \quad \text{很靠近 100 了}$$

$$(28)c=3, a=30$$

$$\log_3 30 = \frac{\log 30}{\log 3} = \frac{1.477}{0.477} = 3.096$$

從小算盤可以查出

$$3^{3.096} = 30 \quad \text{答案正確}$$