

(31) 對數

假設我們有一個一傳二的傳染病，這個傳染病傳出去的情況如下：

第一次 一人染病

第二次 二人染病

第三次 四人染病

我們如果需要問幾次幾人染病，我們就可以用以下的式子來表示

$2^x = 1$ 求 x

對數就是根據這種想法決定出來，對數的定義如下：

若 $a > 0, a \neq 1, b > 0, a^x = b$, 則 $x = \log_a b$

以 a 為底時 b 的對數， a 是底數， b 為真數

1. $2^2 = 4, \log_2 4 = 2$

2. $2^4 = 16, \log_2 16 = 4$

3. $3^3 = 27, \log_3 27 = 3$

4. $3^4 = 81, \log_3 81 = 4$

5. $5^2 = 25, \log_5 25 = 2$

6. $5^3 = 125, \log_5 125 = 3$

7. $10^2 = 100, \log_{10} 100 = 2$

8. $10^3 = 1000, \log_{10} 1000 = 3$

9. $12^2 = 144, \log_{12} 144 = 2$

10. $13^2 = 169, \log_{13} 169 = 2$

11. $2^{-1} = \frac{1}{2}, \log_2 \frac{1}{2} = -1$

12. $4^{\frac{1}{2}} = 2, \log_4 2 = \frac{1}{2}$

13. $3^{-2} = \frac{1}{9}, \log_3 \frac{1}{9} = -2$

14. $a^0 = 1, \log_a 1 = 0$

15. $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}, \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$

16. $(\frac{1}{2})^{-2} = 4, \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

17. $3^{-2} = \frac{1}{9}, \log_3 \frac{1}{9} = -2$

$$18. 5^{-1} = \frac{1}{5}, \log_5 \frac{1}{5} = -1$$

$$19. 3^0 = 1, \log_3 1 = 0$$

$$20. 1012^0 = 1, \log_{1012} 1 = 0$$

$$21. 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

$$22. 4^{\frac{1}{2}} = 2, \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

我們看到了這些關於對數的例子，現在我們要談一下如何求對數。

對數定律一； $\log_a a = 1$

這個定律很容易理解的，因為 $a^1 = a$ ，所以 $\log_a a = 1$

對數定律二； $\log_a 1 = 0$

這個定律很容易理解的，因為 $a^0 = 1$ ，所以 $\log_a 1 = 0$

對數定律三； $\log_a rs = \log_a r + \log_a s$

我們現在來證明這個定理

$$a^{x1} = r, \log_a r = x1$$

$$a^{x2} = s, \log_a s = x2$$

$$rs = (a^{x1})(a^{x2}) = a^{x1+x2}$$

$$\log_a rs = x1 + x2 = \log_a r + \log_a s$$

我們現在舉幾個例子

$$1. \log_2 8 = \log_2(4 * 2) = \log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3 \quad (2^3 = 8)$$

$$2. \log_2 32 = \log_2(8 * 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5 \quad (2^5 = 32)$$

$$3. \log_{10} 1000 = \log_{10}(100 * 10) = \log_{10} 100 + \log_{10} 10 = 2 + 1 = 3 \quad (10^3 = 1000)$$

$$4. \log_3 27 = \log_3(9 * 3) = \log_3 9 + \log_3 3 = 2 + 1 = 3 \quad (3^3 = 27)$$

$$5. \log_3 81 = \log_3(9 * 9) = \log_3 9 + \log_3 9 = 2 + 2 = 4 \quad (3^4 = 81)$$

$$6. \log_4 64 = \log_4(16 * 4) = \log_4 16 + \log_4 4 = 2 + 1 = 3 \quad (4^3 = 64)$$

對數定律四； $\log_a r^t = t \log_a r$

這個定律是根據定律三的，根據對數定律三

$$\log_a r^t = \log_a r.r..r..r..r. = \log_a r + \dots \dots \log_a r = t \log_a r$$

1. $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3$ ($2^3 = 8$)
2. $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \log_2 2 = 5$ ($2^5 = 32$)
3. $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3 \log_4 4 = 3$ ($4^3 = 64$)
4. $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4$ ($3^4 = 81$)
5. $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2$ ($3^2 = 9$)
6. $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \log_3 3 = 3$ ($3^3 = 27$)
7. $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5 = 2$ ($5^2 = 25$)
8. $\log_{10} 10000 = \log_{10} 10^4 = 4 \log_{10} 10 = 4$ ($10^4 = 10000$)
9. $\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \log_6 6 = 2$ ($6^2 = 36$)
10. $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2 \log_7 7 = 2$ ($7^2 = 49$)
11. $\log_{11} 121 = \log_{11} 11^2 = 2 \log_{11} 11 = 2$ ($11^2 = 121$)
12. $\log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = 2 \log_{12} 12 = 2$ ($12^2 = 144$)
13. $\log_{16} 256 = \log_{16} 16^2 = 2 \log_{16} 16 = 2$ ($16^2 = 256$)
14. $\log_{13} 169 = \log_{13} 13^2 = 2 \log_{13} 13 = 2$ ($13^2 = 169$)

對數定律五； $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$

證明方法如下

$$a^{x1} = r, \log_a r = x1$$

$$a^{x2} = s, \log_a s = x2$$

$$\frac{r}{s} = \frac{a^{x1}}{a^{x2}} = a^{x1-x2}, \log_a \frac{r}{s} = x1 - x2 = \log_a r - \log_a s$$

1. $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 1 - \log_2 4 = 0 - 2 = -2$ ($2^{-2} = \frac{1}{4}$)
2. $\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 1 - \log_3 3 = 0 - 1 = -1$ ($3^{-1} = \frac{1}{3}$)
3. $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 1 - \log_3 9 = 0 - 2 = -2$ ($3^{-2} = \frac{1}{9}$)
4. $\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 1 - \log_5 25 = 0 - 2 = -2$ ($5^{-2} = \frac{1}{25}$)
5. $\log_6 \frac{1}{36} = \log_6 1 - \log_6 36 = 0 - 2 = -2$ ($6^{-2} = \frac{1}{36}$)

對數定律六； $a^{\log_a b} = b$

這個定律是根據對數的定義來的，如果 $a^x = b$ ，則 $x = \log_a b$ ， $a^{\log_a b} = b$

1. $3^{\log_3 9} = 9$ ($\log_3 9 = 2, 3^2 = 9$)

2. $2^{\log_2 16} = 16$ ($\log_2 16 = 4, 2^4 = 16$)
3. $5^{\log_5 25} = 25$ ($\log_5 25 = 2, 5^2 = 25$)
4. $4^{\log_4 16} = 16$ ($\log_4 16 = 2, 4^2 = 16$)
5. $2^{\log_2 32} = 32$ ($\log_2 32 = 5, 2^5 = 32$)

各位同學應該很容易如何求對數了，比方說以下這個例子

1. $\log_2 4$ ($\log_2 4 = 2$)
2. $\log_3 9$ ($\log_3 9 = 2$)
3. $\log_2 8$ ($\log_2 8 = 3$)
4. $\log_3 27$ ($\log_3 27 = 3$)
5. $\log_5 25$ ($\log_5 25 = 2$)
6. $\log_4 16$ ($\log_4 16 = 2$)
7. $\log_{10} 100$ ($\log_{10} 100 = 2$)
8. $\log_{10} 1000$ ($\log_{10} 1000 = 3$)

但是同學們一定不知道如何求 $\log_2 6$ ，如果 $x = \log_2 6$ ，則 $2^x = 6$ 。我們發現 $2^2 = 4 < 6$ ，但是 $2^3 = 8 > 6$ ，所以 $x = 2 + a$ ， $2^x = 2^{2+a} = 2^2 * 2^a = 4 * 2^a = 6$ ， $2^a = \frac{6}{4} = 1.5$ ， $2^a = 1.5$

所以我們知道 $0 < a < 1$ ，以下我們可以猜一個 a ，假設 $a=0.5$ ， $2+a=2.5$ ，我們要求 $2^{2.5}$ 這不容易，同學們如果自己要求 $2^{2.5}$ 可以回頭去看有關指數的講義，我們可以利用電腦的小算盤，因此知道 $2^{2.5} = 5.65$ ， 5.65 已經很靠近 6 了，所以我們可以說 $\log_2 6 = 2.5$ ，這知道是一個近似值不夠精確的，但是作為一個中學生這已經很不錯了。

假設我們要求 $\log_3 11$ ，我們發現 $3^2 = 9 < 11$ ，但 $3^3 = 27 > 11$

我們令 $\log_3 11 = 2 + b$ ， $3^{2+b} = 3^2 * 3^b = 9 * 3^b = 11$ ， $3^b = \frac{11}{9} = 1.2$ ，

$$0 < b < 1$$

我們先令 $b = 0.5$

$$3^{2+b} = 3^{2+0.5} = 3^{2.5} = 15，太大了$$

令 $b=0.2$

$$3^{2+b} = 3^{2.2} = 12，仍然太大了$$

令 $b=0.1$

$$3^{2+b} = 3^{2.1} = 10.64，太小了$$

令 $b=0.15$

$3^{2+b} = 3^{2+0.15} = 3^{2.15} = 10.6$ ，很接近了

我們結論是 $\log_3 11 = 2.15$ (近似值)

我們要求 $\log_{10} 150$ ， $10^2 = 100 < 150$ ， $10^3 = 1000 > 150$

我們令 $\log_{10} 150 = 2 + b$ ， $10^{2+b} = 10^2 * 10^b = 100 * 10^b = 150$ ， $10^b = \frac{150}{100} =$

1.5

$0 < b < 1$

先令 $b=0.1$

$10^{2+b} = 10^{2.1} = 125$ ，可以再大一點

令 $b=0.15$

$10^{2+b} = 10^{2.15} = 141$ ，已經很靠近 15 了

所以 $\log_{10} 150 = 2.15$ ，這是我們求得近似值，如果仍用小算盤 $\log_{10} 150 = 2.17$ 可見得用我們的方法，也可以求得不錯的近似值。

我們求 $\log_{10} 300$

令 $\log_{10} 300 = 2 + b$

先令 $b=0.3$

$10^{2+b} = 10^{2+0.3} = 10^{2.3} = 199$ ，太小了

令 $b=0.4$

$10^{2+b} = 10^{2+0.4} = 10^{2.4} = 251$ ，已靠近

令 $b=0.43$

$10^{2+b} = 10^{2+0.43} = 10^{2.43} = 281$ ，已十分靠近

我們結論

$\log_{10} 300 = 2.45$

如果仍用小算盤可以得到

$\log_{10} 300 = 2.47$

我們實在不錯了