(29)有理數的指數定律

我們在過去常看到$2^1=2$, $2^2=4,2^3=8$,我們不知道$2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{1}{3}}$或$2^{\frac{1}{4}}$的意義，其實這並不困難，

$\because \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2=2^{\frac{1}{2}*2}=2^1=2$

$\therefore 2^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{2}$

同理

$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3=2^1=2$

$2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$

我們因此有下列的式子

$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

1. $2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$
2. $4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{4}$
3. $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{3}$
4. $5^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{5}$
5. $100^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{100}$
6. $36^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{36}=3$
7. $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2*2*2}=2$
8. $9^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{9}=\sqrt[2]{3*3}=3$
9. $256^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{256}=\sqrt[2]{16*16}=16$
10. $81^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{9*9}=9$
11. $729^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{27*27}=27$

12. $729^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9*9*9} = 9$

13. $729^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

14. $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{4}} = \frac{1}{2}$

15. $125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$

16. $36^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{36^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{36}} = \frac{1}{6}$

17. $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{9}} = \frac{1}{3}$

18. $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{100} = 10$

19. $100^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{100^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{100}} = \frac{1}{10}$

20. $1000^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$

我們現在看$a^{\frac{m}{n}}$, 有兩種方法解釋$a^{\frac{m}{n}}$

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$-------------------------------------(1)

$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$--------------------------------------(2)

假設 a=4,m=3,n=2

$a^{\frac{m}{n}} = 4^{\frac{3}{2}}$

假設(1) $4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

假設(2) $4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

可以看出(1)和(2)都是可以用的，比較常用的是(2),我們先假設 m>n，在這種情況我們可以簡化原案。

我們要求 $a^{\frac{m}{n}}$

假設我們用公式(2)

$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$

令 $m = n + (m - n)$

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{n+(m-n)}\right)^{\frac{1}{n}} = (a^n)^{\frac{1}{n}} * (a^{m-n})^{\frac{1}{n}} = a * \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m-n}$

因此可以得此下列公式 如果 m>n 則

$a^{\frac{m}{n}} = a * \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m-n}$ ------------------------------------(3)

1. $4^{\frac{3}{2}} = 4 * \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{3-2} = 4 * 2^1 = 4 * 2 = 8$
2. $5^{\frac{4}{3}} = 5 * \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{4-3} = 5 * \left(\sqrt[3]{5}\right)^1 = 5 * \sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$
3. $9^{\frac{3}{2}} = 9 * \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{3-2} = 9 * (3)^1 = 9 * 3 = 27$

我們也可以直接計算 $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = 27$

4. $3^{\frac{3}{2}} = 3 * \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{3-2} = 3 * (\sqrt{3})^1 = 3\sqrt{3}$
5. $(a^2 + 2ab + b^2)^{\frac{3}{2}} = (a^2 + 2ab + b^2)\left((a^2 + 2ab + b^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{3-2} =$

   $(a^2 + 2ab + b^2)(a + b)^1 = (a + b)^2(a + b) = (a + b)^3$

也可以如此做

$(a^2 + 2ab + b^2)^{\frac{3}{2}} = ((a + b)^2)^{\frac{3}{2}} = (a + b)^3$

在下面我們要介紹 m<n 時，$a^{\frac{m}{n}}$的計算過程，我們假設 m<n，公式 2 和 3 仍然可以用 4 我們用例子來說明

$9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 * 3} = \sqrt[3]{3^3 * 3} = (3^3)^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{3} = 3\sqrt{3}$

$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[3]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8$

我們也可以用下列的方法

$16^{\frac{3}{4}} = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3 = (2)^3 = 8$

$4^{\frac{2}{3}} = (4^2)^{\frac{1}{3}} = (16)^{\frac{1}{3}} = (8 * 2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = (2^3)^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$

$25^{\frac{2}{3}} = (25^2)^{\frac{1}{3}} = ((5^2)^2)^{\frac{1}{3}} = (5^4)^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{3}} = 5\sqrt[3]{5}$

$36^{\frac{2}{3}} = (6^2)^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{4}{3}} = (6^4)^{\frac{1}{3}} = (6^3 * 6)^{\frac{1}{3}} = (6^3)^{\frac{1}{3}}\ (6)^{\frac{1}{3}} = 6\sqrt[3]{6}$

$64^{\frac{2}{3}} = (4^3)^{\frac{2}{3}} = 4^{3 * \frac{1}{3}} = 4^2 = 16$

以下我們要討論指數為小數點的計畫，首先我們用下列的例子證明

$2^{0.2} = 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$

$2^{0.3} = 2^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$

$\sqrt[5]{2}$ 和 $\sqrt[10]{8}$ 都可以找到他們的近似值，以 $\sqrt[5]{2}$ 為例，我們假設

$\sqrt[5]{2} = 1 + 6$

$(1 + b)^5 = 2$

$1 + 5b = 2$

$5b = 1$

$b = 0.2$

假設我們令 $b = 0.1$

$(1.1)^5 = 1.61$ 太小了

我們令 $b = 1.14$

$(1.14)^5 = 1.9255$ 已經很近 2 了

我們因此可知 $2^{0.2} = 0.14$