

(28)平方根

如果 $a^2 = x$ 那 $\sqrt{x} = a$ 通常我們也至少將 \sqrt{x} 變成 \sqrt{x} 對於很多學生來說至少應該就得

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{256} = 16$$

$$\sqrt{289} = 17$$

$$\sqrt{324} = 18$$

$$\sqrt{361} = 19$$

但是相對於大家想知道，如果計算 $\sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{4} \dots \dots \dots$ 等，這些你可以利用計算機查出任何一個整數的平方根，我們在這裡告訴大家如何求出一個數的平方根，我們將用例子來說明

(1) $x=6$

要求 $\sqrt{6}$ 我們先找一個最大的整數 a ，而 $a^2 < 6$ 這個 a 一定是2，因為 $2^2 = 4 < 6$ ， $3^2 = 9 > 6$

我們可以說 $\sqrt{6} = 2 + b$

$$(2 + b)^2 = 4 + 4b + b^2$$

為了簡化意見，我們暫時不考慮 b^2 因為 $b < 1$ 所以 b^2 很小

$$(2 + b)^2 = 4 + 4b < b$$

$$4b < 6 - 4 = 2$$

$$b < \frac{2}{4} = 0.5$$

假設我們令 $b=0.43$

$$\text{則 } x=2+0.43=2.43$$

我們再看 $(2.43)^2 = 5.9049$ ， 5.9049 很靠近6了，所以我們可以說 $\sqrt{6} = 2.43$

(2) $x=21$

我們先找最大的整數 a ，而 $a^2 < 21$ ， $a=4$ ，因為 $4^2 = 16 < 21$ ， $5^2 = 25 > 21$

$$\text{我們令 } \sqrt{21} = 4 + b$$

$$(4 + b)^2 = 16 + 8b + b^2 = 21$$

不考慮 b^2 只考慮

$$16 + 8b < 21$$

$$8b < 5$$

$$b < \frac{5}{8} = 0.625$$

假設我們令 $b=0.57$

$$\text{則 } \sqrt{x} = 4.57$$

我們再看 $(4.57)^2 = 20.88$ ，20.88 很靠近 21 了，所以我們可以說 $\sqrt{21} = 4.58$

(3) $x=54$

我們令 $\sqrt{54} = 7 + b$ ，因為 $7^2 = 49 < 54$ ， $8^2 = 64 > 54$

$$54 = (7 + b)^2 = 49 + 14b + b^2$$

$$14b < 54 - 49 = 5$$

$$14b < 5$$

$$b < \frac{5}{14} = 0.354$$

假設我們令 $b=0.34$

$$\text{則 } \sqrt{54} = 7.34$$

$$(7.34)^2 = 53.87$$

53.87 很靠近 54 了，所以我們可以說 $\sqrt{54} = 7.34$

(4) $x=85$

我們令 $\sqrt{85} = 9 + b$

$$(9 + b)^2 = 81 + 18b + b^2 = 85$$

$$18b < 85 - 81 = 4$$

$$b < \frac{4}{18} = 0.22$$

假設我們令 $b=0.21$

$$\text{則 } \sqrt{85} = 9.21$$

$$(9.21)^2 = 84.82$$

84.82 很靠近 85 了，所以我們可以說 $\sqrt{85} = 9.21$

在第一個例子中，我們說

$$\sqrt{6} = 2.43$$

$$(2.43)^2 = 5.9049$$

假設我們要求更精確 可以令

$$\sqrt{6} = 2.43 + c$$

$$(2.43 + c)^2 = b$$

$$5.9049 + 4.86c < 6$$

$$4.86C < 6 - 5.9049$$

$$4.86C < 0.0951$$

$$C < \frac{0.0951}{4.86} = 0.019$$

我們令 $C=0.015$

$\sqrt{6} = 2.43 + 0.015 = 2.445$, $(2.445)^2 = 5.9278025$, 5.9278025 比 5.9049 更靠近 6 , 所以 $\sqrt{6} = 2.445$ 是一個更精確的答案。

在以上 我們討論了平方根，在下面我們討論如何求一個數的三次方

$$2^3 = 8 \quad \sqrt[3]{8} = 2$$

$$3^3 = 27 \quad \sqrt[3]{27} = 3$$

$$4^3 = 64 \quad \sqrt[3]{64} = 4$$

$$5^3 = 125 \quad \sqrt[3]{125} = 5$$

$$6^3 = 216 \quad \sqrt[3]{216} = 6$$

$$7^3 = 343 \quad \sqrt[3]{343} = 7$$

$$8^3 = 512 \quad \sqrt[3]{512} = 8$$

$$9^3 = 729 \quad \sqrt[3]{729} = 9$$

$$10^3 = 1000 \quad \sqrt[3]{1000} = 10$$

但如何求其他三次方根的答案，我們可以利用下面的公式

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

比方說 $a=2$ $b=3$ $a+b=5$ $5^3 = 125$ 用以上的公式

$$(2 + 3)^3 = 2^3 + 3 * 2^2 * 3 + 3 * 2 * 3^2 + 3^3 = 8 + 36 + 54 + 27 = 125$$

(5) 求 $\sqrt[3]{10}$

我們可以看出 $\sqrt[3]{10} = 2 + b$ ，因為 $2^3 = 8 < 10$ ，而 $3^3 = 27 > 10$

$$\sqrt[3]{10} = 2 + x$$

$$10 = (2 + b)^3 = 8 + 3(2^2)b + 3(2)b^2 + b^3 = 10$$

$$8 + 3(2^2)b < 10$$

$$8 + 12b < 10$$

$$12b < 10 - 8$$

$$12b < 2$$

$$b < \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = 0.166$$

假設我們嘗試令 $b=0.1$ ，則 $2+b=2.1$ ， $(2.1)^3 = 9.261 > 9$

所以我們要將 b 降一點，假設我們令 $b=0.8$ ，則 $2+b=2.08$ ， $(2.08)^3 = 8.998912$ 這很靠近 10 了，所以我們可以說 $\sqrt[3]{10} = 2.08$

(6) 求 $\sqrt[3]{30}$

我令 $\sqrt[3]{30} = 3 + b$ ，因為 $3^3 = 27 < 30$ ，而 $4^3 = 64 > 30$

$$\sqrt[3]{30} = 3 + b$$

$$30 = (3 + b)^3$$

$$3^3 + 3(3^2)b < 30$$

$$27 + 27b < 30$$

$$27b < 30 - 27 = 3$$

$$b < \frac{30}{27} = 0.11$$

假設我們令 $b=0.09$ ， $3+b=3.09$ ， $(3.09)^3 = 29.503629$ ，這很靠近 30 了，所以我們們可以說 $\sqrt[3]{30} = 3.09$

(7) 求 $\sqrt[3]{100}$

令 $\sqrt[3]{100} = 4 + b$ ，因為 $4^3 = 64 < 100$ ，而 $5^3 = 125 > 100$

$$(4 + b)^3 = 4^3 + 3(4)^2b < 100$$

$$64 + 48b < 100$$

$$48b < 100 - 64$$

$$b < \frac{3}{4} = 0.75$$

假設我們令 $b=0.75$ ， $4+b=4.7$ ， $(4.7)^3 = 103.823 > 100$

假設我們令 $b=0.6$ ， $4+b=4.6$ ， $(4.6)^3 = 97.336 < 100$ 很靠近 100 了，所以我們們可以說 $\sqrt[3]{100} = 4.6$

(8) 求 $\sqrt[3]{150}$

令 $\sqrt[3]{150} = 5 + b$ ，因為 $5^3 = 125 < 150$ ，而 $6^3 = 216 > 150$

$$150 = (5 + b)^3$$

$$5^3 + 3(5)^2b < 150$$

$$125 + 75b < 150$$

$$75b < 150 - 125$$

$$75b < 25$$

$$b < \frac{25}{75} = \frac{1}{3} = 0.333$$

假設我們選 $b=0.3$ ， $5+b=5.3$ ， $(5.3)^3 = 148.877$ ，很靠近 150 了，所以我們們可以

說 $\sqrt[3]{150} = 5.3$