(26) 指數

假設 a 為實數，n 是正整數

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots\cdots a}^{n\text{次}}$$

a 是底數，n 是指數

$(1)2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$

$(2)3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 27 \times 3 \times 3 = 81 \times 3 = 243$

$(3)4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 16 \times 4 = 64$

$(4)(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$(5)\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

$(6)(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$(7)(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

$(8)\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

指數定律

指數第一定律$a^m a^n = a^{m+n}$

(9)a=2，m=2, n=3

$(2^2)(a^3) = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 4 \times 8 = 32$

我們可以用$(a^m)(a^n)=a^{m+n}$來計算

$(a^2)(a^3)=a^{2+3}=a^5=32$

(10) $a=\frac{1}{2}$，m = 2，n = 2

$(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^{2+2}=(\frac{1}{2})^4=\frac{1^4}{2^4}=\frac{1}{16}$

(11)a=-2，m=1，n=2

$(-2)^1(-2)^2=(-2)^{1+2}=(-2)^3=-8$

$a^m a^n=a^{m+n}$也可以寫成 $a^{m+n}=(a^m)(a^n)$

假設我們要計算a^h，而且很大，就可以利用以上的定律

(12)假設 a=2，h=7，我們可以將 h 分解成 h=7=3+4

∴ $a^h=2^7=(2^3)(2^4)$

要求 2^3，我們又可以使用 3=2+1

∴ $2^3=(2^2)(2^1)$

要求 2^4，我們可以利用 4=2+2

∴ $2^4=(2^2)(2^2)$

∴ $2^7=(2^3)(2^4)=(2^2)(2^1)(2^2)(2^2)=4\times 2\times 4\times 4=8\times 16=128$

(13) 假設 a=3，h=5，h=2+3

∴ $3^h=3^5=(3^2)(3^3)$

$3^3=(3^1)(3^2)$

$\therefore\ 3^h = 3^5 = (3^2)(3^1)(3^2) = 9 \times 3 \times 9 = 27 \times 9 = 243$

(14)求2^{10}

$2^{10} = (2^5)(2^5) = (2^3)(2^2)(2^3)(2^2) = 8 \times 4 \times 8 \times 4 = 32 \times 32 = 1064$

指數第二定律 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

假設 m,n 都是正整數，而且 m＞n，則我們可以假設 m=n+h，因此 m-n=h。

根據第一定律$a^m = a^{n+h} = a^n a^h$

$\therefore\ \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n a^h}{a^n} = a^h = a^{m-n}$

（15） a=2，m=5, n=3

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2 = 2^2 = 4$

（16） a=-3，m=4, n=2

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = (-3)^{4-2} = (-3)^2 = 9$

(17) a=$\frac{3}{2}$ ，$m = 5$ ，$n = 4$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{5-4} = a^1 = (\frac{3}{2})^1 = \frac{3}{2}$

（18） a=3，m=7，n=5

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{7-5} = a^2 = 3^2 = 9$

指數第三定律 $a^0=1$

從指數第二定律，我們有$a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$

假設 m=n，a^{m-n}=a^0=$\frac{a^m}{a^m}$=1

∴ $a^0=1$

(19) $(\pi^5+\pi^3)^0$=1

指數第四定律 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

我們先看幾個例子

（20）a=2，m=2，n=3，n-m=3-2=1

a^{m-n}=$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^2}{a^3}=\frac{a^2}{(a^2)(a^1)}=\frac{1}{a^1}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{n-m}}$

（21）a=3，m=2，n=4，n-m=2

a^{m-n}=$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^2}{a^3}=\frac{a^2}{(a^2)(a^2)}=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{3^{n-m}}$

假設 n＞m，可令 n=m+h

a^{m-n}=$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{(a^m)(a^h)}=\frac{1}{a^h}$

但 $\mathrm{m}-\mathrm{n}=-\mathrm{h}$

∴ $a^{-h}=\frac{1}{a^h}$

以上是指數第四定律的證明，我們也可以用指數第一定律和指數第三定律證明。

根據指數第一定律$(a^n)(a^{-n}) = a^{n-n} = a^0$

根據指數第三定律 $a^0 = 1$

$\therefore\ (a^n)(a^{-n}) = 1$

$\therefore\ (a^{-n}) = \frac{1}{a^n}$

(22) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(23) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(24) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

指數第五定律$(a^n)(b^n) = (ab)^n$

假設 a=2，b=3，n=2

$(a^n)(b^n) = (2^2)(3^2) = 4 \times 9 = 36$

如果利用指數第五定律

$(2^2)(3^2) = (2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$

(25) $(3^3)(2^3) = (3 \times 2)^3 = 6^3 = 216$

(26) $(-3)^2(2)^2 = ((-3) \times 2)^2 = (-6)^2 = 36$

(27) $(-2)^3(2)^3 = ((-2) \times 2)^3 = (-4)^3 = -64$

(28) $(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{2})^2 = (\frac{2}{3} \times \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$