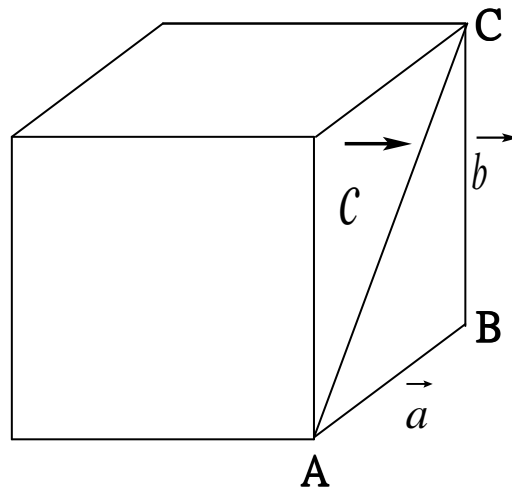


(25) 高階的向量

在以前，我們的向量只包含倆的元素，如 $(3, 5)$ 和 $(-1, 4)$ 。我們擴大向量的定義，使一個向量可以包含 n 個數字， n 可以加於 2 ，例如 $(3, 1, 4)$ 、 $(4, -1, 5, -2)$ 等等，都是向量。如果一個向量含有 n 個數字，我們說這個向量是 n 度向量。

2度向量可以想成2度空間的向量，我們現在討論3度向量，3度向量是與3度空間有關的。

(5)請看下圖：



$$A=(1, 0, 0)$$

$$B=(1, 1, 0)$$

$$C=(1, 1, 1)$$

$$\vec{a} = (1 - 1, 1 - 0, 0 - 0) = (0, 1, 0)$$

$$\vec{b} = (1 - 1, 1 - 1, 1 - 0) = (0, 0, 1)$$

$$\vec{c} = (1 - 1, 1 - 0, 1 - 0) = (0, 1, 1)$$

我們可以看 \vec{a} 和 \vec{b} 是否垂直

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 0) = 0$$

$\therefore \vec{a}$ 和 \vec{b} 是互相垂直的

再看 \vec{c} 和 \vec{a} 之間的角度 θ

$$\cos \theta = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|} = \frac{0 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \times \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

(6)空間三點

$$A=(1, 2, 1)$$

$$B=(-1, 1, 2)$$

$$C=(2, 1, -1)$$

$$\overline{AB}\text{之間的向量}\vec{a} = (1 - (-1), 2 - 1, 1 - 2) = (2, 1, -1)$$

$$\overline{AC}\text{之間的向量}\vec{b} = (1 - 2, 2 - 1, 1 - (-1)) = (-1, 1, 2)$$

\overline{AB} 和 \overline{AC} 之間的夾角為 θ

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times 2 = -2 + 1 - 2 = -3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{-3}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 120^\circ$$

科西不等式

假設有兩個向量 \vec{a} 和 \vec{b} ，它們的夾角是 θ ，則

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\because \cos \theta \leq 1$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

這是科西不等式

(7) 假設

$$\vec{a} = (4, 2, 3)$$

$$\vec{b} = (1, 2, 1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 4 + 4 + 3 = 11$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29} \cong 5.4$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \cong 2.4$$

$$\therefore |\vec{a}| |\vec{b}| = 5.4 \times 2.4 = 12.96$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 11 < |\vec{a}| |\vec{b}| = 12.96$$

利用科西不等式，我們證明一個有趣的數學定理

$$\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$$

證明的方法如下：

$$\text{令 } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}, a_2 = \frac{1}{\sqrt{b}}, a_3 = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

$$\text{令 } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$$

$$\therefore b_1 = \sqrt{a}, b_2 = \sqrt{b}, b_3 = \sqrt{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} \times \sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{c}} \times \sqrt{c} = 1 + 1 + 1 = 3$$

根據科西不等式

$$3 \leq \sqrt{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right) \times \left((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2\right)}$$

$$3 \leq \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \times (a + b + c)}$$

$$\therefore (a + b + c) \times \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

$$\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \geq 9$$

$$\frac{a}{a} + \frac{b+c}{a} + \frac{b}{b} + \frac{a+c}{b} + \frac{c}{c} + \frac{a+b}{c} \geq 9$$

$$3 + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 9$$

$$\therefore \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$$

(8) 令 $a=3, b=1, c=4$

$$\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} = \frac{1+4}{3} + \frac{3+4}{1} + \frac{3+1}{4} = \frac{5}{3} + 7 + 1 = 8 + \frac{5}{3} > 6$$