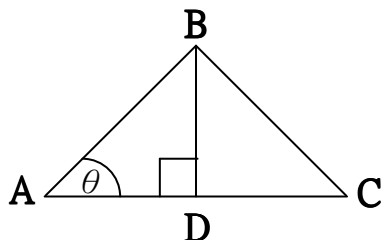


## (24) 向量的應用

我們首先要討論向量的應用：求三角形的面積，請看下圖：



$\triangle ABC$  的面積是  $\frac{1}{2} \overline{BD} \times \overline{AC}$

假設我們已知  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  以及  $\angle BAC = \theta$

我們就可以求出  $\overline{BD}$ ，因為

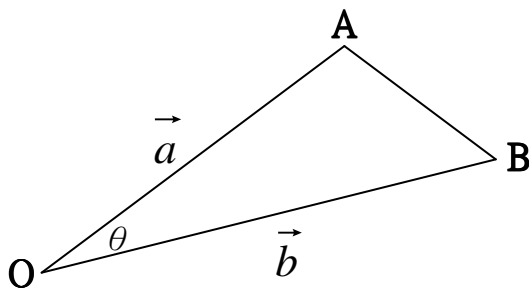
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \sin \theta$$

$$\therefore \overline{BD} = \overline{AB} \sin \theta$$

因此， $\triangle ABC$  的面積是  $\frac{1}{2} (\overline{AB} \times \overline{AC}) \sin \theta$

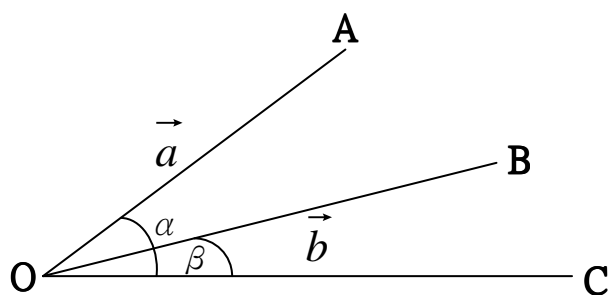
問題是  $\sin \theta$  如何可知道？

如果我們使用向量來表示三角形，三角形就會像下圖：



$\triangle OAB$  的面積是  $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$

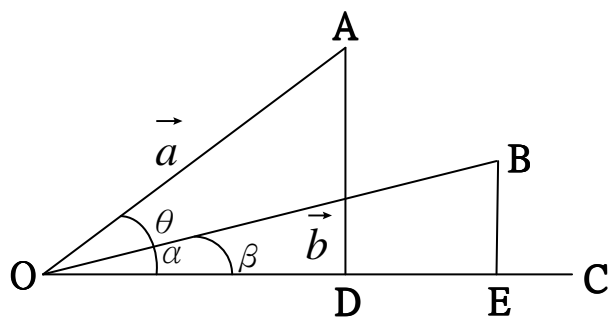
要求得 $\sin \theta$ ，可以用下圖：



在上圖， $OC$  是  $x$  軸， $\angle AOC = \alpha$ ， $\angle BOC = \beta$

$$\therefore \angle AOB = \alpha - \beta = \theta$$

我們再從  $A$  和  $B$  作垂直於  $OC$  的垂直線，如下圖：



$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2)$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AD}}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OD}}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

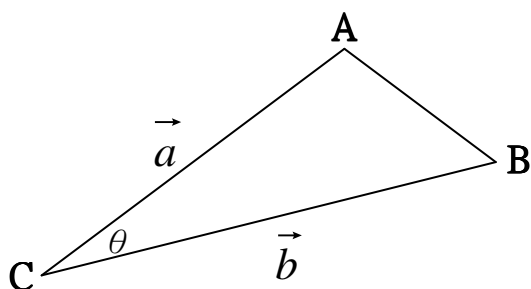
$$\sin \beta = \frac{\overline{BE}}{|\vec{b}|} = \frac{b_2}{|\vec{b}|}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{OE}}{|\vec{b}|} = \frac{b_1}{|\vec{b}|}$$

我們可以利用三角加減公式： $\sin \theta = \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

$$\therefore \sin \theta = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

根據以上的公式，我們可以知道如果 $\triangle ABC$ 如下圖：



則 $\triangle ABC$ 的面積是

$$\frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2} (a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

(1) 假設  $A=(1, 2)$  ,  $B=(4, 6)$  ,  $C=(6, 5)$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (4 - 1, 6 - 2) = (3, 4) = (a_1, a_2) \quad a_1 = 3, a_2 = 4$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (6 - 1, 5 - 2) = (5, 3) = (b_1, b_2) \quad b_1 = 5, b_2 = 3$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} (a_2 b_1 - a_1 b_2) = \frac{1}{2} (4 \times 5 - 3 \times 3) = \frac{1}{2} (20 - 9) = \frac{11}{2}$$

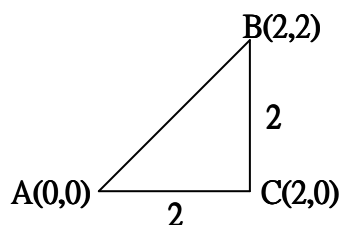
(2) 假設  $A=(0, 0)$  ,  $B=(2, 2)$  ,  $C=(2, 0)$

$$\vec{a} = (2 - 0, 2 - 0) = (2, 2) \quad a_1 = 2, a_2 = 2$$

$$\vec{b} = (2 - 0, 0 - 0) = (2, 0) \quad b_1 = 2, b_2 = 0$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2}(a_2b_1 - a_1b_2) = \frac{1}{2}(2 \times 2 - 2 \times 0) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

這個三角形如下圖：

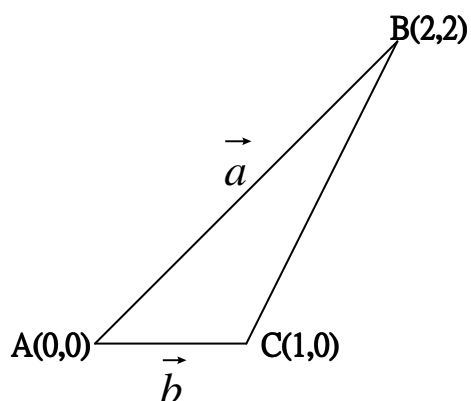


大家可以很容易地證明 $\triangle ABC$ 的面積是

$$\frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

所以我們用向量的算法是正確的

(3)請看下圖：



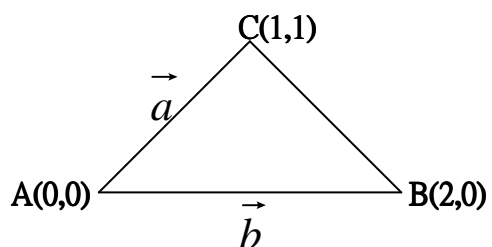
$$\vec{a} = (2 - 0, \quad 2 - 0) = (2, 2) \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2$$

$$\vec{b} = (1 - 0, \quad 0 - 0) = (1, 0) \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 0$$

△ABC 的面積是

$$\frac{1}{2}(a_2b_1 - a_1b_2) = \frac{1}{2}(2 \times 1 - 2 \times 0) = 1$$

(4)請看下圖：



$$\vec{a} = (1 - 0, \quad 1 - 0) = (1, 1) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

$$\vec{b} = (2 - 0, \quad 0 - 0) = (2, 0) \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 0$$

△ABC 的面積是

$$\frac{1}{2}(a_2b_1 - a_1b_2) = \frac{1}{2}(1 \times 2 - 1 \times 0) = 1$$