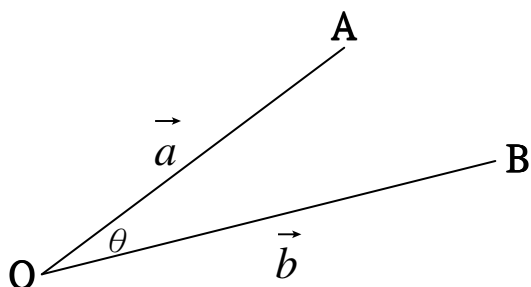
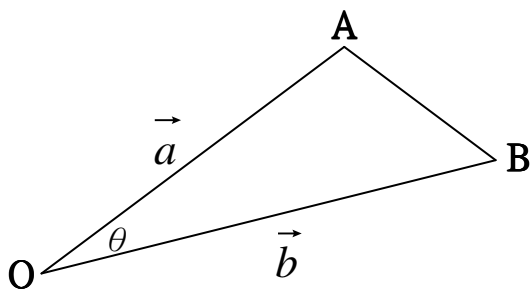


### (23) 向量的內積

請看下圖：



圖中有有兩個向量:A 和 B，他們的起點在同一點，我們希望知道他們的夾角。要知道  $\theta$ ，我們可以連接 A 和 B，形成一個三角形如下圖：



根據三角函數的餘弦定律

$$|\overline{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overline{AB}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} \text{-----(1)}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \text{-----(2)}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \text{-----(3)}$$

我們仍要知道 $\overline{AB}^2$ ，須知我們並不知道 A 和 B 的座標，只知道 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 以及 $\vec{b} = (b_1, b_2)$

假設 OAB 的座標如下：

$$O = (x_0, y_0)$$

$$A = (x_a, y_a)$$

$$B = (x_b, y_b)$$

我們又知 $a_1 = x_a - x_0, a_2 = y_a - y_0, b_1 = x_b - x_0, b_2 = y_b - y_0$

從上式可得

$$(a_1 - b_1)^2 = (x_a - x_b)^2$$

$$(a_2 - b_2)^2 = (y_a - y_b)^2$$

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 = \overline{AB}^2$$

$$\overline{AB}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \text{-----}(4)$$

在方程式(1)中有

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overline{AB}|^2 \text{-----}(5)$$

將(2)和(3)代入(5)

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2) - (a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2) = 2(a_1b_1 + a_2b_2) \text{-----}(6)$$

$$\text{將(6)代入(1)，可得 } \cos \theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{-----}(7)$$

$a_1b_1 + a_2b_2$  是 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的內積，我們可以用 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 來表示 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的內積。所以向量的內積之定義如下：

假設有 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 和 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ，則 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的內積是

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1b_1 + a_2b_2) \text{-----}(8)$$

將(8)代入(7)，可得

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{-----}(9)$$

我們可以說兩個向量的內積和他們的夾角有關，內積有多種用途，我們的興趣其實只要知道這兩個向量是否互相垂直，如果互相垂直，則  $\cos \theta = 0$ ，也就是說，

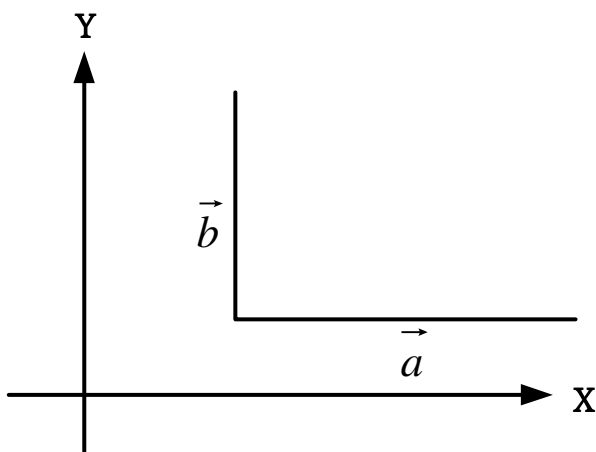
如果  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，則  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  就是互相垂直的。

$$(1) \vec{a} = (2, 0), \vec{b} = (0, 1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (0 \cdot 0) = 0$$

$\vec{a}$  和  $\vec{b}$  互相垂直

下圖可以顯示這兩個向量互相垂直

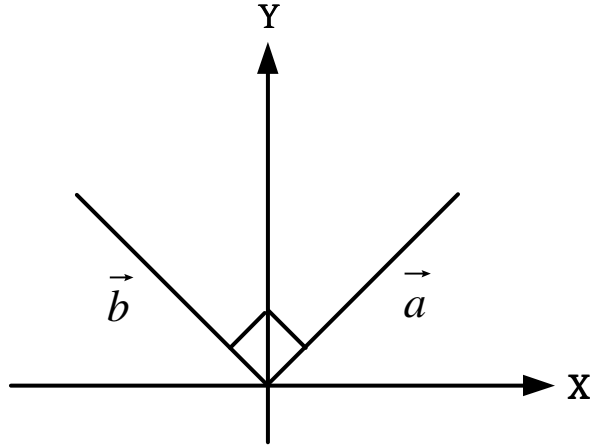


請注意，向量只要方向和長度，在平面上的座標是不重要的。

$$(2) \vec{a} = (1, 1), \vec{b} = (-2, 2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1 * (-2) + 1 * (2)) = (-2 + 2) = 0$$

$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 互相垂直， $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的圖如下：



$$(3) \vec{a} = (1,1) \quad \vec{b} = (0,1)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

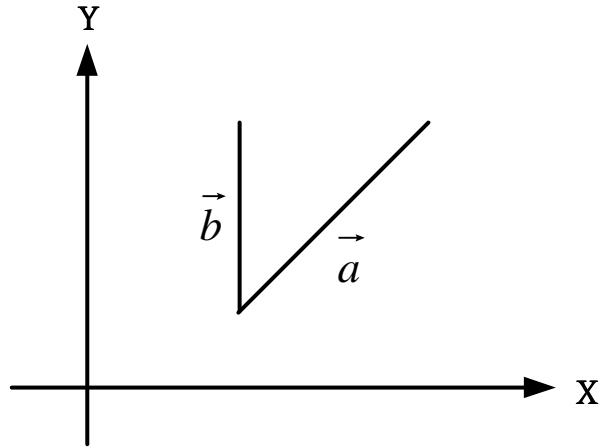
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1 * 0 + 1 * 1) = (0 + 1) = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2} \quad |\vec{b}| = 1$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 45^\circ$$

各向量如下圖所示：



$$(4) \vec{a} = (1,0) \quad \vec{b} = (2,0)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1 * 2 + 0 * 0) = 2$$

$$|\vec{a}| = 1 \quad |\vec{b}| = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{1 * 2} = 1$$

$$\theta = 0^\circ$$

可知兩向量互相平行

$$(5) \vec{a} = (1,0) \quad \vec{b} = (\sqrt{3},1)$$

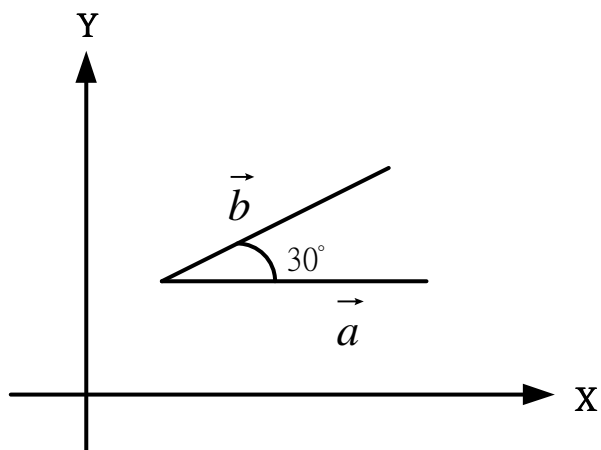
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1 * \sqrt{3} + 0 * 1) = \sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| = 1 \quad |\vec{b}| = \sqrt{3+1}=2$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}}{1 * 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 30^\circ$$

各向量如下圖



$$(6) \vec{a} = (1,0) \quad \vec{b} = (1,1)$$

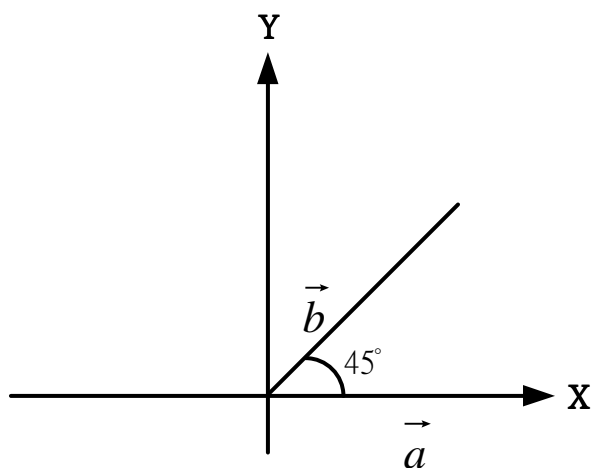
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1 * 1 + 0 * 1) = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1} \quad |\vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

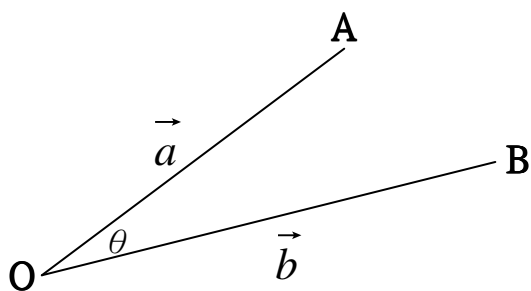
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

各向量如下圖



### 內積的另一解釋

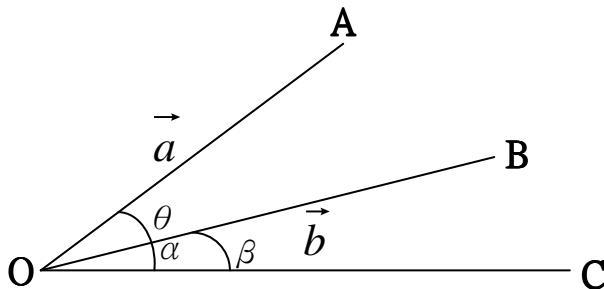
內積的推導與兩個向量的夾角有關，請看下圖



在過去，我們要知道 COS 的大小，是將 A 和 B 連接起來得到一個三角形 OAB 然後我們利用餘弦函數定理，而得到以下公式：

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

我們從 O 點畫出一條與 X 軸平行的直線



假設  $\angle AOC = \alpha$ ， $\angle BOC = \beta$ ，則  $\alpha - \beta = \theta$

假設

$$O = (x_0, y_0)$$

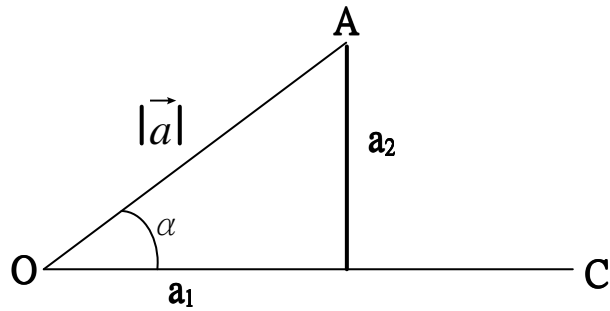
$$A = (x_a, y_a)$$

$$B = (x_b, y_b)$$

$$\text{則 } \vec{a} = (a_1, a_2) = (x_a - x_0, y_a - y_0)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2) = (x_b - x_0, y_b - y_0)$$

$\angle AOC = \alpha$ ，如下圖



$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$$\sin \alpha = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

同理所得

$$\cos \beta = \frac{b_1}{|\vec{b}|}$$

$$\sin \beta = \frac{b_2}{|\vec{b}|}$$

按照三角函數的和差公式

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

故得

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 b_1 + a_2 b_2) \text{ 及 } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

## 規格化的向量



向量可以有任意的長度，但有時我們需要一個長度為 1 的向量，方向仍需是原來的，我們用一個函數來解釋。

$$\text{假設 } \vec{a} = (3,4), |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\text{我們可以看出 } |\vec{a}'| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+16}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

$$(7) \quad \vec{b} = (1, -3)$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{b}' = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$$

可以看出

$$|\vec{b}'| = \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1$$

任意一個向量 A 都可以轉換成 A 的長度一定是 1，方向和 C 是一樣的，這種向量是規格化的向量。我們現在考慮另一個問題，假設我們只有一個向量

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ ，我們要有一個和  $\vec{a}$  垂直的向量  $\vec{b}$ ，這種  $\vec{b}$  有兩個

$$\vec{b}_1 = (-a_2, a_1)$$

$$\vec{b}_2 = (a_2, -a_1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}_1 = -a_1 a_2 + a_2 a_1 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}_2 = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0$$

$\vec{a}$  和  $\vec{b}_1$  及  $\vec{b}_2$  都是垂直的

$$(8) \quad \vec{a} = (2,3)$$

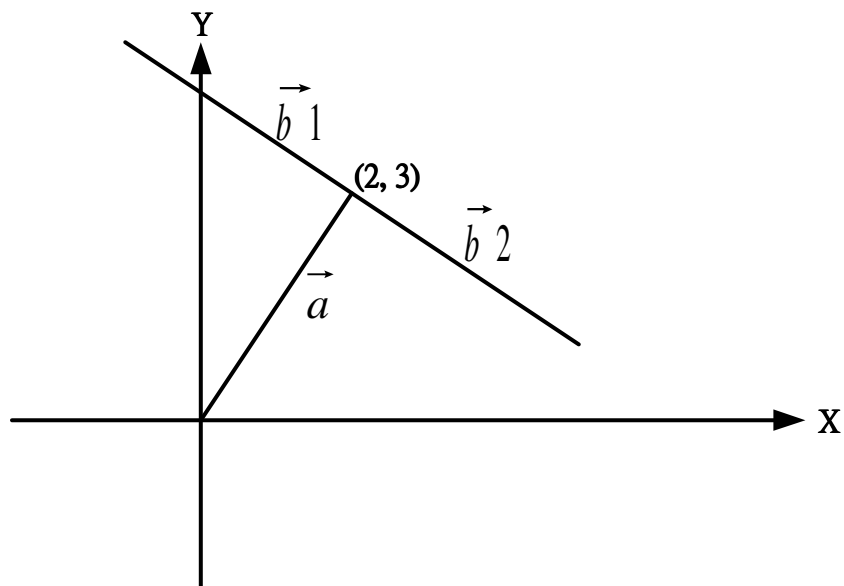
$$\vec{b}_1 = (-3, 2)$$

$$\vec{b}_2 = (3, -2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}_1 = (2 * (-3) + 3 * 2) = -6 + 6 = 0$$

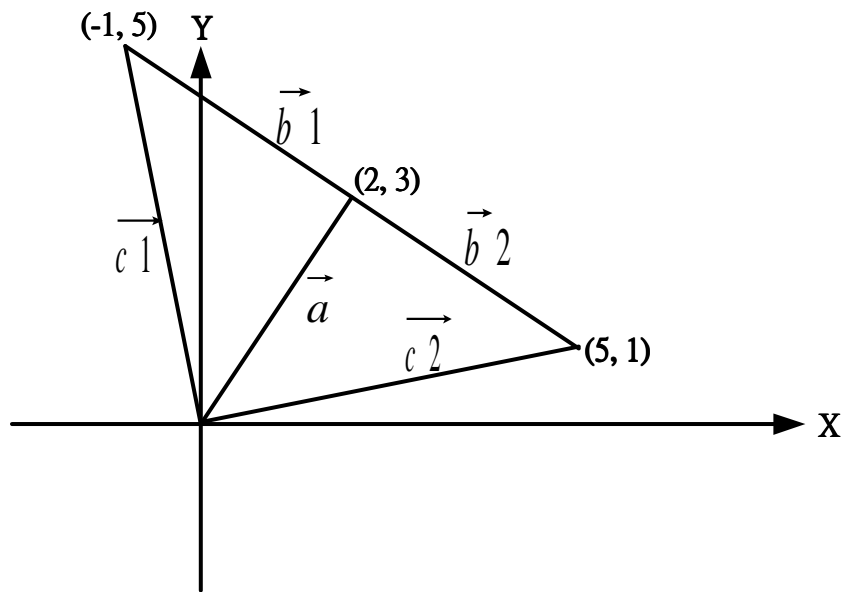
$$\vec{a} \cdot \vec{b}_2 = (2 * 3 + 3 * (-2)) = 6 - 6 = 0$$

$\vec{a}$ 和 $\vec{b}_1$ 及 $\vec{b}_2$ 都是垂直的，這些向量可用下圖表示



我們可以看出對 $\vec{a}$ 向量而言，是 $\vec{b}_1$ 反時鐘旋轉的，而 $\vec{b}_2$ 是順時鐘旋轉的。

我們也可以看出 $\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}_1$ 和 $\vec{c}_2 = \vec{a} + \vec{b}_2$ ，下圖顯示了 $\vec{c}_1$ 和 $\vec{c}_2$



$$\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}_1 = (2,3) + (-3,2) = (-1,5)$$

$$\vec{c}_2 = \vec{a} + \vec{b}_2 = (2,3) + (3,-2) = (5,1)$$

以上的資料也是可以用來決定要選 $\vec{b}_1$ 或 $\vec{b}_2$

$$(9) \quad \vec{a} = (-1, -4)$$

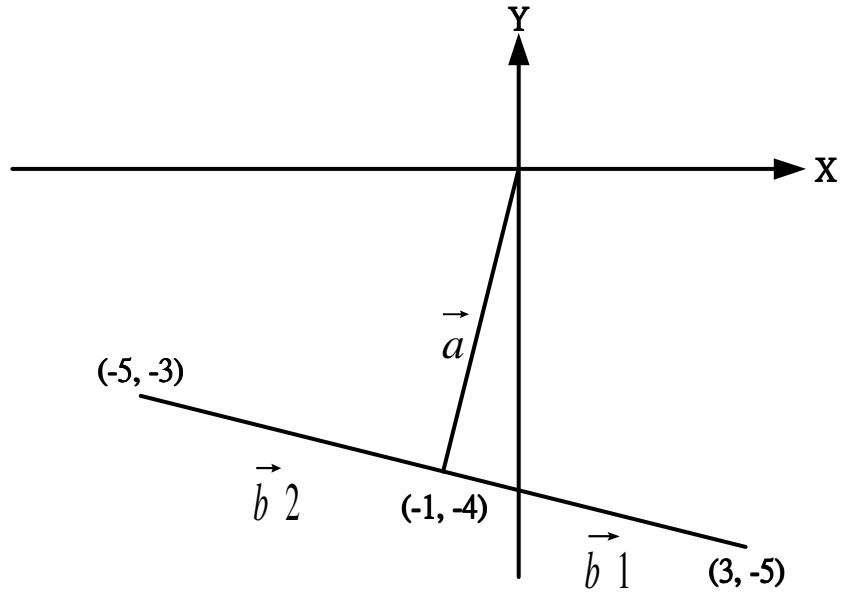
$$\vec{b}_1 = (4, -1)$$

$$\vec{b}_2 = (-4, 1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}_1 = ((-1) * (4) + (-4) * (-1)) = (-4 + 4) = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}_2 = ((-1) * (-4) + (-4) * (-1)) = (4 - 4) = 0$$

$\vec{a}$ 和 $\vec{b}_1$ 與 $\vec{b}_2$ 都是互相垂直的，它們的關係如下圖



此時， $\vec{b}_1$ 逆時針旋轉  $\vec{b}_2$ 順時針。以上的做法， $\vec{b}$ 的長度和 $\vec{a}$ 的長度是一樣的，如果我們規定 $\vec{b}$ 的長度為  $d$ ，可以用規格的向量求得，也就是我們可以利用以下的公式

$$\vec{b}' = d \left( \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

如此 $|\vec{b}'| = b$  圖為 $\left| \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right| = 1$

(10)  $\vec{a} = (3,4)$ ，我們要有一個長度為 2 而又與 $\vec{a}$ 垂直的向量

$$\vec{b} = (4, -3)$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{b}' = 2 \left( \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

$$\vec{b}' = 2 \left( \frac{(4,3)}{5} \right) = 2 \left( \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) = \left( \frac{8}{5}, \frac{6}{5} \right)$$

我們可以看出 $\vec{b}$ 的長度

$$|\vec{b}'| = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$$

$\vec{b}'$ 符合我們的長度

$$(11) \quad \vec{a} = (1, -1)$$

$$\vec{b} = (-1, 1)$$

$$d = 1.3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

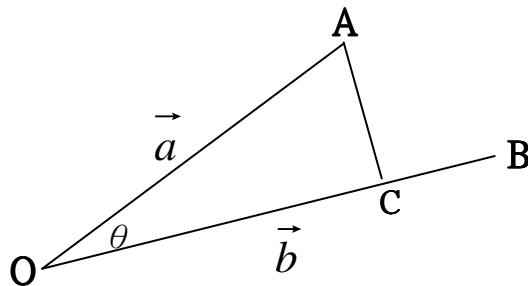
$$\vec{b}' = 1.3 \left( \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = 1.3 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{1.3}{\sqrt{2}}, \frac{1.3}{\sqrt{2}} \right)$$

$$|\vec{b}'| = \sqrt{\left(\frac{1.3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 * \frac{(1.3)^2}{2}} = 1.3$$

$\vec{b}'$ 符合我們的要求

## 向量的正射影

請看以下的圖



$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 之間有夾角， $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的垂線和 $\vec{b}$ 交於C點，我們先求OC的長度。

$$\overline{OC} = \overline{OA} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\therefore \overline{OC} = |\vec{a}| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$(12) \quad \vec{a} = (2,2) \quad \vec{b} = (3,0)$$

$$\overline{OC} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\therefore \overline{OC} = \frac{2 * 3 + 2 * 0}{3} = 2$$

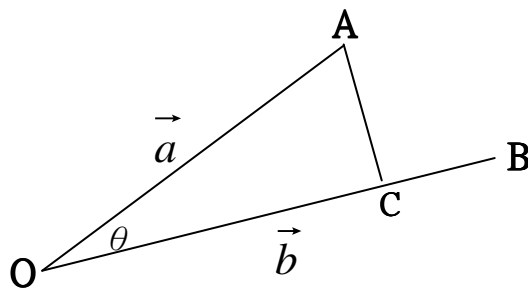
$$(13) \quad \vec{a} = (2,1) \quad \vec{b} = (1,-1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2 * 1 + 1 * (-1)) = (2 - 1) = 1$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\overline{OC} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

我們再看一下原來的圖



所謂的 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的正射影除了 OC 的長度以外，還要包含它的方向，OC 的方向和 $\vec{b}$ 的

方向是一樣的，因此 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影是一向量 $\vec{c}$ ：

$$\vec{c} = \overline{OC} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$(14) \quad \vec{a} = (2,2) \quad \vec{b} = (3,0)$$

在題(12)中得 $\overline{OC}=2$

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的正射影向量是

$$\vec{c} = \overline{OC} \left( \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = 2 \frac{(3,0)}{3} = 2(1,0) = (2,0)$$

我們可以看出 $|\vec{c}| = 2 = |\overline{OC}|$ ， $\vec{c}$ 的方向和 $\vec{b}$ 的方向相同

$$(15) \quad \vec{a} = (2,1) \quad \vec{b} = (1,-1)$$

從題(13)中可知 $\overline{OC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\vec{c} = \overline{OC} \left( \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \left( \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right)$$

我們可以看出 $|\vec{c}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$|\vec{c}| = |\overline{OC}|$ ， $\vec{c}$ 的方向和 $\vec{b}$ 的方向也是相同的

根據以上的辯論，我們可以有以下的有關正射影的向量公式。

向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的正射影與向量 $\vec{c}$

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

$$(16) \quad \vec{a} = (1,4) \quad \vec{b} = (2,1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1 * 2 + 4 * 1) = 2 + 4 = 6$$

$$|\vec{b}|^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = \frac{6}{5}$$

$$\vec{c} = \frac{6}{5}\vec{b} = \frac{6}{5}(2,1) = \left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

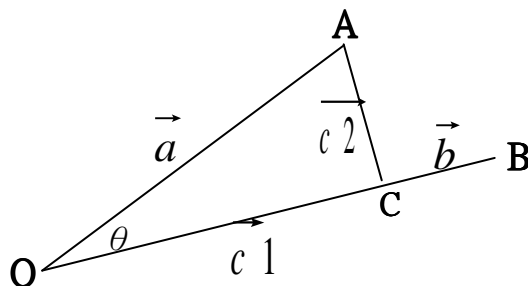
$$(17) \quad \vec{a} = (4,1) \quad \vec{b} = (2,0)$$

$$|\vec{b}|^2 = 2^2 = 4$$

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{4 * 2 + 1 * 0}{2^2} (2,0) = \frac{8}{4} (2,0) = (4,0)$$

## 向量的分向量

請看下圖



我們可以得知 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的兩個分向量 $\vec{c}_1$ 在 $\vec{c}_2$ 的性質如下：

1.  $\vec{c}_1$ 是 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影
2.  $\vec{c}_1$ 與 $\vec{c}_2$ 互相垂直
3.  $\vec{c}_1 + \vec{c}_2 = \vec{a}$

$$(18) \quad \vec{a} = (4,2) \quad \vec{b} = (1,0)$$

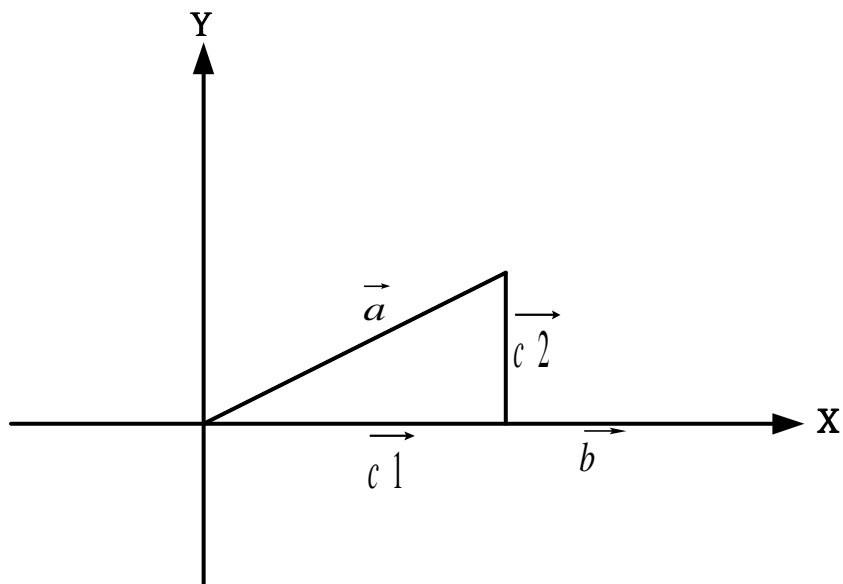
$$|\vec{b}| = 1$$

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{4 * 1 + 2 * 0}{1^2} (1,0) = \frac{4}{1} (1,0) = (4,0)$$



$$\begin{aligned} \because \vec{c}_1 + \vec{c}_2 &= \vec{a} \\ (4,0) + \vec{c}_2 &= (4,2) \\ \therefore \vec{c}_2 &= (4,2) - (4,0) = (0,2) \end{aligned}$$

各向量的圖如下



$$(19) \quad \vec{a} = (4,3) \quad \vec{b} = (0,2)$$

$$|\vec{b}| = 2$$

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 2}{2^2} (0,2) = \frac{6}{4} (0,2) = (0,3)$$

$$\vec{c}_1 + \vec{c}_2 = \vec{a}$$

$$(0,3) + \vec{c}_2 = (4,3)$$

$$\vec{c}_2 = (4,3) - (0,3) = (4,0)$$

各向量的圖如下

