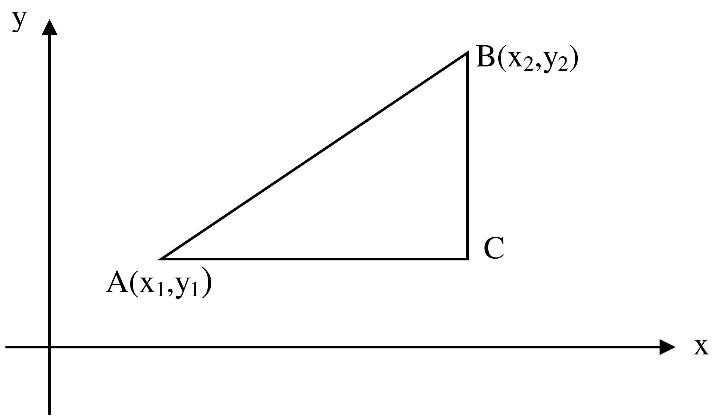
(22) 向量

講向量前,我們要從點談起,假設我們有兩點:A(x_1,y_1)和 B(x_2,y_2),我們要知道 A、B 兩點的直線距離。



$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{AC} = |x_2 - x_1|$$

$$\overline{BC} = |y_2 - y_1|$$

$$\therefore \overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(1) A=(3,-1) , B(-5,3)

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(-5-3)^2 + \left(3-(-1)\right)^2}$$

$$= \sqrt{(-8)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{64+16}$$

$$= \sqrt{80}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

(2) A=(-1,5) , B(3,-6)

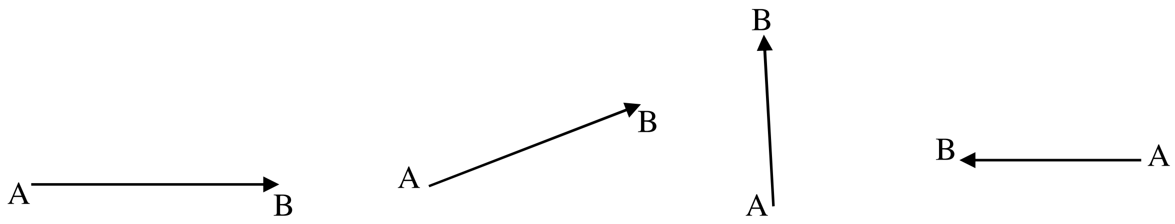
$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(3-(-1))^2 + \left((-6)-5\right)^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (-11)^2}$$

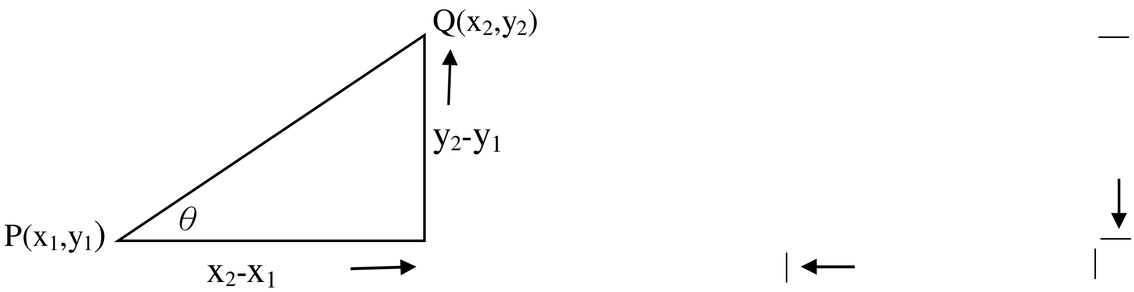
$$= \sqrt{16+121}$$

$$= \sqrt{137}$$

除了兩點之間的距離，我們還想知道兩點所連成的直線方向，請看下圖:



我們的直線線段有一個起點 $P(x_1,y_1)$和一個終點 $Q(x_2,y_2)$

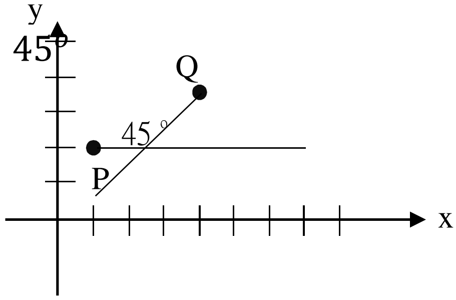


因此我們知道 P 和 Q 在平面上的座標，我們可以用三角函數來決定 θ 角的值:　　$\tan\theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(3) P=(1,2) ,Q=(4,5)

$$tan\,\theta = \frac{5-2}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$$

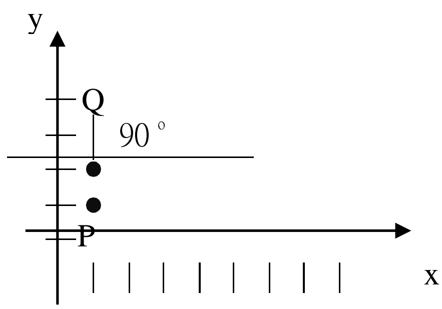
$$\Rightarrow \theta = 45^o$$



(4) P=(1,2) ,Q=(1,3)

$$tan\,\theta = \frac{3-2}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

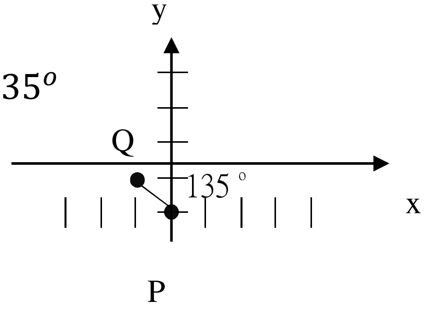
$$\Rightarrow \theta = 90^o$$



(5) P=(0,0) ,Q=(-1,1)

$$tan\,\theta = \frac{1-0}{-1-0} = -1$$

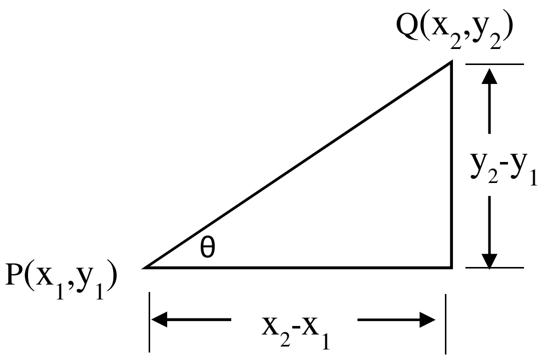
$$\Rightarrow \theta = 135^o$$



所謂向量，可以說向量是一個有長度和方向的數學量。

因此我們知道一個線段的起點和終點，我們可以決定線段的長度。令起點 P(x_1,y_1)、終點 Q(x_2,y_2)，這個線段的長度就是

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



這個線段的方向由(y_2-y_1)和(x_2-x_1)來決定，因此一個向量方向用(y_2-y_1)和(x_2-x_1)來表示。我們在討論向量時，是不管它在平面上的位置的。

向量通常用一個箭號表示。圖示$\vec{a}$代表一個向量，$\vec{a}$代表a的長度。向量$\vec{a}$所代表的線段一定有一個起點(x_1, y_1)和終點(x_2, y_2)。所以 $\vec{a}=((x_2-x_1), (y_2-y_1))$。

(6) $\vec{a}$=(5,3) ，是一個向量，因此(x_2-x_1)=5，(y_2-y_1)=3。

已知的長度是

$|\vec{a}|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$

$\vec{a}$的方向可由它對 x 軸的夾角θ來看

$$tan\,\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{5} = 0.6$$

(7) $\vec{a}$=(-5,3)

$(x_2-x_1)=-5$，$(y_2-y_1)=3$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$tan\,\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{-5} = -0.6$$

向量在日常生活中常被用到的，比方說，我們常說向東走一公里或者說，學校在家的東北方，距離是 35 公里，這些話都可用向量來描寫的。

向量在物理上更是非常重要，因此力有大小和方向性，向量在通訊上也相當重要，這些到了大學就可以學會了。

(8) $\vec{a}$=(3,-7) ,已知起點是(1,3)求終點座標。

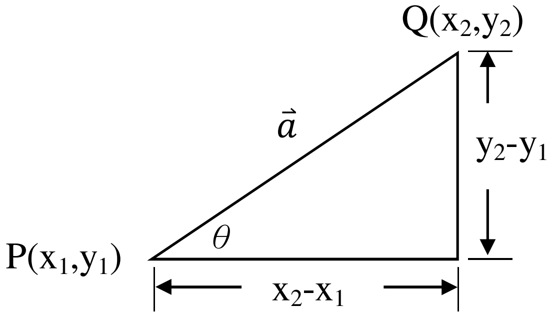
設終點 Q=(x,y)

則 x-1=3 ∴x=4

y−(−7)=3 ∴y=−4

終點 Q=(4,-4)

假如我們已知$|\vec{a}|$以及$\vec{a}$和 x 軸的夾角，就可以求得$\vec{a}$請看下圖:



$x_2 - x_1 = |\vec{a}|\cos\theta$
$y_2 - y_1 = |\vec{a}|\sin\theta$

(9)已知$|\vec{a}| = 2$,$\vec{a}$和 x 軸的夾角是45^o,求$\vec{a}$。

令$\vec{a}$起點 $P(x_1,y_1)$、終點 $Q(x_2,y_2)$,則$\vec{a}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

$x_2 - x_1 = |\vec{a}|\cos\theta = 2\cos 45^o = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$y_2 - y_1 = |\vec{a}|\sin\theta = 2\sin 45^o = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\therefore \vec{a} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

(10)已知$|\vec{a}| = 2$,$\theta = 30^o$,求$\vec{a}$。

令$\vec{a}$起點和終點分別 $P(x_1,y_1)$和 $Q(x_2,y_2)$,則$\vec{a}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

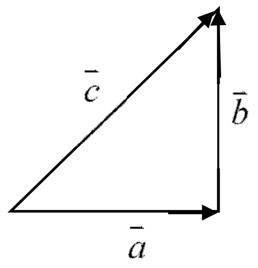
$x_2 - x_1 = |\vec{a}|\cos\theta = 2\cos 30^o = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$y_2 - y_1 = |\vec{a}|\sin\theta = 2\sin 30^o = 2\times\frac{1}{2} = 1$

$\therefore \vec{a} = \left(\sqrt{3}, 1\right)$

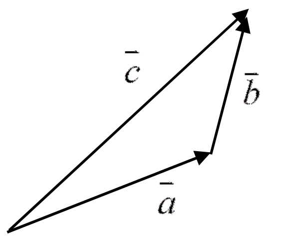
向量的加減

我們時常說，你至少向東走兩公里，再往北走一公里，這時我們就有兩個向量，一個向東一個向北，如下圖所示:



我們至少看上$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

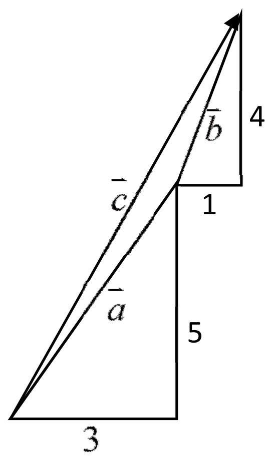
下圖也是兩個向量的加減



假設$\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$，令$\vec{c}=(c_1,c_2)$

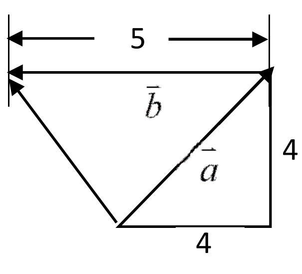
(11) 已知$\vec{a}=(3,5)$，$\vec{b}=(1,4)$，求$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$。

$$\begin{aligned}\vec{c}&=(a_1+b_1,a_2+b_2)\\&=(3+1,5+4)\\&=(4,9)\end{aligned}$$



(12) $\vec{a}=(4,4)$，$\vec{b}=(-5,0)$，求$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$。

$$\begin{aligned}\vec{c}&=(4+(-5),4+0)\\&=(-1,4)\end{aligned}$$



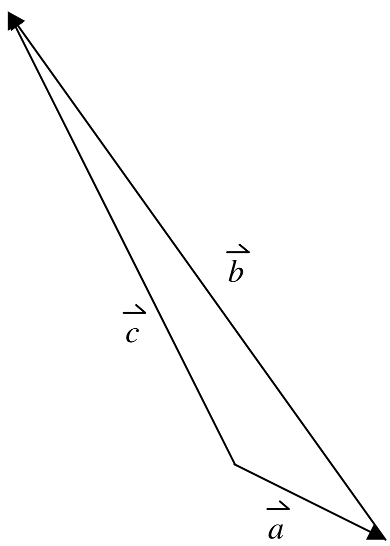
(13) $\vec{a} = (2,-1)$，$\vec{c} = (-3,6)$，已知$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$，求$\vec{b}$。

令$\vec{b} = (b_1, b_2)$

$\vec{c} = (-3,6) = \vec{a} + \vec{b} = (2 + b_1, -1 + b_2)$

$2 + b_1 = -3$
$b_1 = -3 - 2 = -5$
$-1 + b_2 = 6$
$b_2 = 6 + 1 = 7$

$\therefore \vec{b} = (b_1, b_2) = (-5,7)$



$\therefore\ \vec{c} = (a_1+b_1\ ,\ a_2+b_2)$

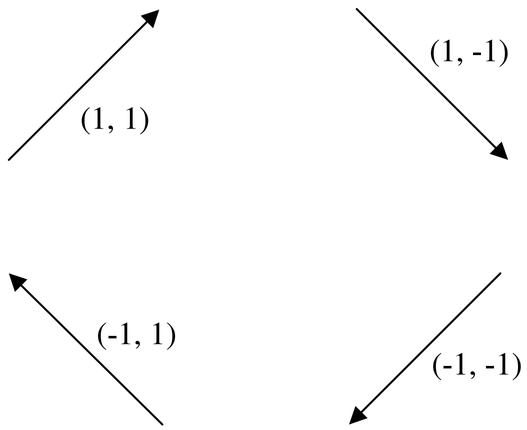
(14) 請畫出以下的向量：

(a) (1, 1)

(b) (1, -1)

(c) (-1, 1)

(d) (-1, -1)


(1, 1)
(1, -1)
(-1, 1)
(-1, -1)