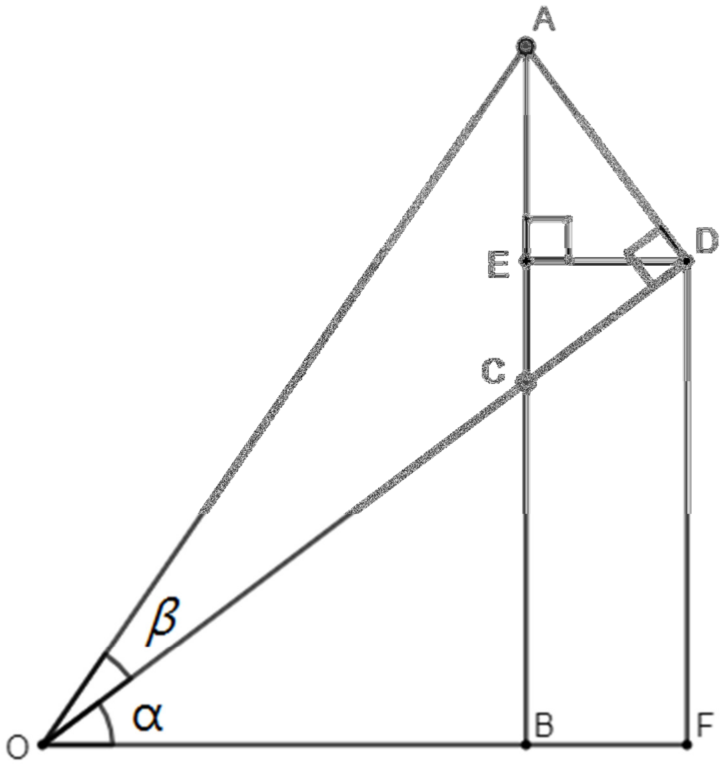
(18) 三角函數的加減公式

和角公式

我們要證明 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$



上圖中，$\overline{AB}\perp\overline{OB}$，$\overline{DF}\perp\overline{OF}$，$\overline{AD}\perp\overline{DC}$，$\overline{AE}\perp\overline{ED}$

證明：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

過程：

$\because \angle ACD=\angle OCB=90°-\alpha$ (對頂角)

$\triangle ACD$ 中，$\angle CAD+\angle ACD=90°$

$\therefore\ \angle CAD=90°-(90°-\alpha)=\alpha$

$\therefore \angle EAD=\angle CAD$

$\therefore \angle EAD = \alpha$

$sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AE}+\overline{EB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{EB}}{\overline{OA}}$...(1)

先考慮$\frac{\overline{AE}}{\overline{OA}}$

在△OAD 中，$\frac{\overline{AD}}{\overline{OA}} = \sin\beta$

在△AED 中，$\angle EAD = \alpha$

$\overline{AE} = \overline{AD}\cos\alpha$

$\frac{\overline{AE}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{OA}}\cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha$ ...(2)

再考慮$\frac{\overline{EB}}{\overline{OA}}$

在△ODF 中，$\overline{DF} = \overline{OD}\sin\alpha$

在△OAD 中，$\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = cos\,\beta$

$\overline{EB} = \overline{DF}$

$\frac{\overline{EB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} sin\,\alpha = cos\,\beta\, sin\,\alpha$...(3)

將(2)和(3)代入(1)中，可以得到

$$sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{EB}}{\overline{OA}} = sin\,\beta\, cos\,\alpha + cos\,\beta\, sin\,\alpha$$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

同樣方法也可以證明 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

這個就留給同學做練習

我們可以將 $\sin(\alpha-\beta)$看成 $\sin(\alpha+(-\beta))$

然後代入前面的公式，得到 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

同理我們利用 $\cos(\alpha+\beta)$的公式，可以得到 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

三角函數的加減公式如下

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
5. $tan(\alpha+\beta)=\frac{tan\,\alpha+tan\,\beta}{1-tan\,\alpha\,tan\,\beta}$ (於例題 9 證明)
6. $tan(\alpha-\beta)=\frac{tan\,\alpha-tan\,\beta}{1+tan\,\alpha\,tan\,\beta}$
7. $cot(\alpha+\beta)=\frac{cot\,\alpha\,cot\,\beta-1}{cot\,\beta+cot\,\alpha}$
8. $cot(\alpha-\beta)=\frac{cot\,\alpha\,cot\,\beta+1}{cot\,\beta-cot\,\alpha}$

例 1. 求 $\sin15^\circ$和 $\cos15^\circ$

過程：

$$sin\,15^\circ$$
$$=sin(45^\circ-30^\circ)$$
$$=sin\,45^\circ cos\,30^\circ-cos\,45^\circ sin\,30^\circ$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$cos\,15°$

$=cos(45°-30°)$

$=cos\,45°\,cos\,30°+sin\,45°\,sin\,30°$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

例 2. 證明 $\sin(90^{\circ}-\alpha)=\cos\alpha$

過程：

$\sin(90^{\circ}-\alpha)$

$=\sin90^{\circ}\cos\alpha-\cos90^{\circ}\sin\alpha$

$=1\times\cos\alpha-0\times\sin\alpha$

$=\cos\alpha$ Q.E.D.

例 3. 證明 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

過程：

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$

$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta$

$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta$

$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

例 4. 證明 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

過程：

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

例 5. 利用和角公式證明 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

過程：

$\sin2\alpha$

$=\sin(\alpha+\alpha)$

$=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\cos\alpha$

例 6. 利用和角公式證明 $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

過程：

$\cos 2\alpha$

$=\cos(\alpha+\alpha)$

$=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

例 7. 已知 $\sin A+\cos A=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，求 $\sin 2A$

過程：

$(\sin A+\cos A)^2=(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^2=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$…(1)

$(\sin A+\cos A)^2=1+2\sin A\cos A$…(2)

由(1)(2)可知

$2\sin A\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

答：$\sin 2A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 8. 已知 $\sin A=\frac{1}{2}$，求 $\sin 2A$

過程：

$\sin A=\frac{1}{2}$

$\cos A=\sqrt{1-sin^2 A}=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

答：$\sin 2A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 9. 證明$tan(\alpha+\beta)=\frac{tan\,\alpha+tan\,\beta}{1-tan\,\alpha\,tan\,\beta}$

過程：

$$
\begin{aligned}
&tan(\alpha+\beta)\\
&=\frac{sin(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)}\\
&=\frac{sin\,\alpha\,cos\,\beta+cos\,\alpha\,sin\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta-sin\,\alpha\,sin\,\beta}\\
&=\frac{\frac{sin\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}+\frac{cos\,\alpha\,sin\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}}{\frac{cos\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}-\frac{sin\,\alpha\,sin\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}}\\
&=\frac{tan\,\alpha+tan\,\beta}{1-tan\,\alpha\,tan\,\beta}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

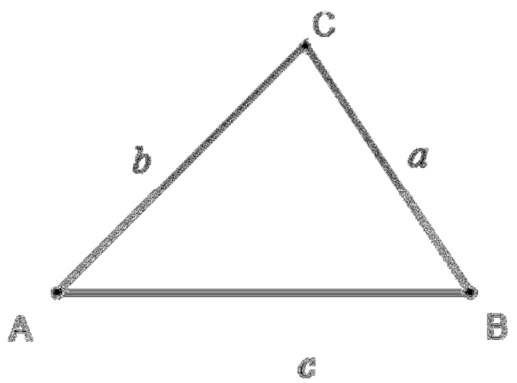
例 10. 證明$sin(45^\circ+\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}(sin\,\alpha+cos\,\alpha)$

過程：

$$
\begin{aligned}
&sin(45^\circ+\alpha)\\
&=sin\,45^\circ cos\,\alpha+cos\,45^\circ sin\,\alpha\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}cos\,\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}sin\,\alpha\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}(sin\,\alpha+cos\,\alpha)
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

做例題 11 前，我們先了解**投影定理**。

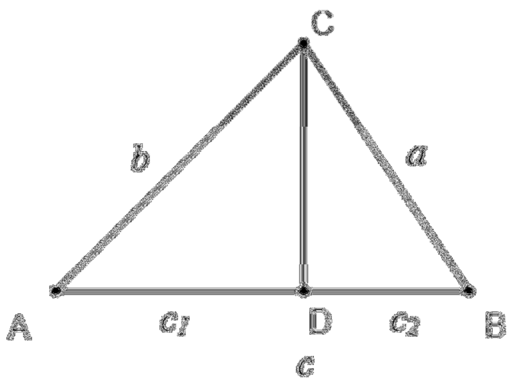


△ABC 中，∠A、∠B、∠C 的對應邊分別為 a、b、c。

則 $a\cos B+b\cos A=c$

$a\sin B-b\sin A=0$

證明：



做$\overline{AB}$邊上的高，且高與$\overline{AB}$交點為 D。

設$\overline{AD}=c_1$、$\overline{BD}=c_2$

$c=c_1+c_2=b\cos A+a\cos B$

$a\sin B-b\sin A=\overline{CD}-\overline{CD}=0$

Q.E.D.

例 11. △ABC 中，∠A、∠B、∠C 的對應邊分別為 a、b、c。證明

對任意角 θ：

$a\cos(\theta-B)+b\cos(\theta+A)=c\cos\theta$

過程：

$a\cos(\theta-B)+b\cos(\theta+A)$

$=a(\cos\theta\cos B+\sin\theta\sin B)+b(\cos\theta\cos A-\sin\theta\sin A)$

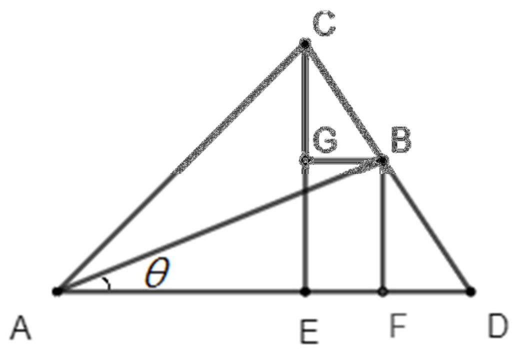
$=a\cos\theta\cos B+b\cos\theta\cos A+a\sin\theta\sin B-b\sin\theta\sin A$

$=\cos\theta(a\cos B+b\cos A)+\sin\theta(a\sin B-b\sin A)$

$=\cos\theta\times c+\sin\theta\times 0$ (利用投影定理)

$=c\cos\theta$

我們也可以在三角形中證明，請看下圖：



上圖中，△ABC 中，∠A、∠B、∠C 的對應邊分別為 a、b、c。

$\overline{CE}\perp\overline{AD}$、$\overline{BF}\perp\overline{AD}$、$\overline{BG}//\overline{AD}$

設∠BAD＝θ、∠CAB＝α、∠CBA＝β

∠CAD＝$\alpha+\theta$

△ABF 中，$c\cos\theta=\overline{AF}$…(1)

△ACE 中，$b\cos(\theta+\alpha)=\overline{AE}$…(2)

由外角定理：

∠BDA＋$\theta=\beta$

∠BDA＝$\beta-\theta$

∵$\overline{BG}//\overline{AD}$

∴∠CBG＝∠BDA＝$\beta-\theta$

△CGB 中，$\overline{GB}=a\cos(\angle CBG)=a\cos(\beta-\theta)=a\cos(\theta-\beta)$

又$\overline{GB}=\overline{EF}$，因此$a\cos(\theta-\beta)=\overline{EF}$…(3)

由圖可知，$\overline{AF}=\overline{AE}+\overline{EF}$，將(1)(2)(3)代入

$c\cos\theta=b\cos(\theta+\alpha)+a\cos(\theta-\beta)$

只看△ABC 時，$\alpha=\angle A$、$\beta=\angle B$

即 $a\cos(\theta-B)+b\cos(\theta+A)=c\cos\theta$

Q.E.D.