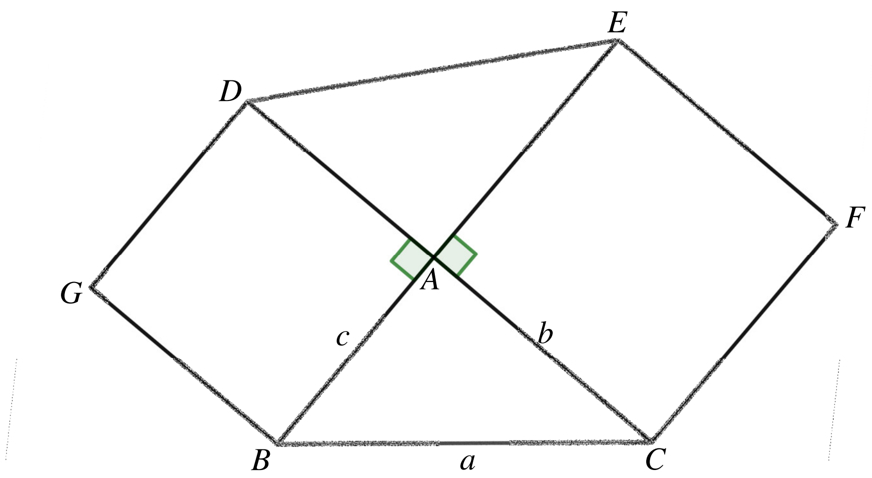
(16) 三角總複習 2

18. 已知ΔABC的邊長為a、b和c，四邊形$EGBA$和四邊形$EACF$都是正方形，求$\overline{DE}$。



【解答】

$\angle DAE = \angle A$

ΔDAE　中，$\overline{DE}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{EA}^2 - 2\cos(\angle DAE)$

$= c^2 + b^2 - 2bc\cos(180° - \angle A)$

$= c^2 + b^2 + 2bc\cos A$----------(1)

ΔABC　中，$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$----------(2)

將(2)代入(1)，$\overline{DE}^2 = c^2 + b^2 + 2bc\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$

$= c^2 + b^2 + c^2 + b^2 - a^2$

$= 2(c^2 + b^2) - a^2$

答：$\overline{DE} = \sqrt{2(c^2+b^2) - a^2}$

19. ΔABC中，a、b、c的邊長比為$1:2:\sqrt{3}$，求$\angle A$、$\angle B$和$\angle C$。

【解答】

令$a = 1h = h$

$b = 2h$

$c = \sqrt{3}h$

$$cos\, A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(2h)^2 + (\sqrt{3}h)^2 - h^2}{2 \times 2h \times \sqrt{3}h} = \frac{4h^2 + 3h^2 - h^2}{4\sqrt{3}h^2}$$

$$= \frac{6h^2}{4\sqrt{3}h^2} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \angle A = 30°$

$$cos\, B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{h^2 + (\sqrt{3}h)^2 - (2h)^2}{2 \times h \times \sqrt{3}h}$$

$$= \frac{h^2 + 3h^2 - 4h^2}{4\sqrt{3}h^2} = 0$$

$\therefore \angle B = 90°$

$$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$$

$$= 180° - (30° + 90°)$$
$$= 180° - 120°$$
$$= 60°$$

答：$\angle A = 30°$、$\angle B = 90°$、$\angle C = 60°$

20. ΔABC中，已知$a：b：c\ =2\sqrt{3}：2：2$，求$\angle A$、$\angle B$和$\angle C$。

【解答】

令$a = 2\sqrt{3}h$

$b = 2h$
$c = 2h$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{(2\sqrt{3}h)^2 + (2h)^2 - (2h)^2}{2 \times \sqrt{3}h \times 2h}$$

$$= \frac{12h^2 + 4h^2 - 4h^2}{4\sqrt{3}h^2}$$

$$= \frac{12h^2}{4\sqrt{3}h^2} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore\ \angle B = 30^\circ$

同理，$\angle C = \angle B = 30^\circ$

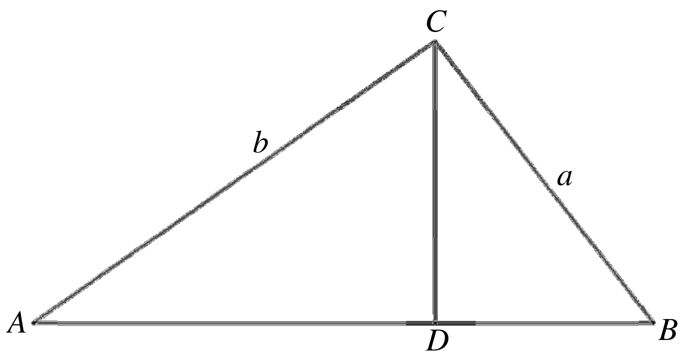
$$\begin{aligned}\angle A &= 180^\circ - (\angle B + \angle C)\\ &= 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ)\\ &= 180^\circ - 60^\circ\\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

答：$\angle A = 120^\circ$、$\angle B = 30^\circ$、$\angle C = 30^\circ$

21. ΔABC中，求證

$a = b\cos C + c\cos B$
$b = c\cos A + a\cos C$
$c = a\cos B + b\cos A$

【證明】



依圖，得知

$\cos A = \frac{\overline{AD}}{b} \Rightarrow \overline{AD} = b\cos A$

$\cos B = \frac{\overline{DB}}{a} \Rightarrow \overline{DB} = a\cos B$

$c = \overline{AD} + \overline{DB} = b\cos A + a\cos B$

同理可證

$a = b\cos C + c\cos B$
$b = c\cos A + a\cos C$

22. 求證：$c(b\cos B - a\cos A) = (a^2 - b^2)\cos C$

【證明】

$$
\begin{aligned}
\text{左邊} &= c\left(b\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - a\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\\
&= c\left[\frac{b^2(a^2+c^2-b^2)}{2abc} - \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{2abc}\right]\\
&= \frac{1}{2ab}\left[b^2(a^2+c^2-b^2) - a^2(b^2+c^2-a^2)\right]\\
&= \frac{1}{2ab}\left[b^2a^2 + b^2c^2 - b^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + a^4\right]\\
&= \frac{1}{2ab}\left[(b^2a^2 - b^4) + (a^4 - a^2b^2) - (a^2c^2 - b^2c^2)\right]\\
&= \frac{1}{2ab}\left[b^2(a^2-b^2) + a^2(a^2-b^2) - c^2(a^2-b^2)\right]\\
&= \frac{(a^2-b^2)}{2ab}(a^2+b^2-c^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右邊} &= (a^2-b^2)\cos C\\
&= (a^2-b^2)\frac{(a^2+b^2-c^2)}{2ab}
\end{aligned}
$$

∵左邊=右邊，故得證

23. 求證：$(b-a\cos c)\sin A=\frac{ac}{2R}\cos A$

【證明】

從第 21 題證明得知$b=c\cos A+a\cos C$

$\therefore(b-a\cos C)=(c\cos A+a\cos C-a\cos C)=c\cos A$-------(1)

將(1)代入左邊$(c\cos A)\sin A$

$=c\cos A\frac{a}{2R}$----(使用正弦定理$\sin A=\frac{a}{2R}$代入)

$=\frac{ac}{2R}\cos A$

故得證

24. 求證：$\cos A=\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$

【證明】 使用正弦定理$\sin A=\frac{a}{2R}$

$\therefore\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-(\frac{a}{2R})^2}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}}=\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$

故得證

25. $\angle A : \angle B : \angle C = 1:1:4$，已知$c = 2\sqrt{3}$，求$a$和$b$。

【作答】由正弦定理

已知$\angle A : \angle B : \angle C = 1:1:4$，

令$\angle A = k$、$\angle B = k$、$\angle C = 4k$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$
$$k + k + 4k = 180°$$

$6k = 180°$，$k = 30°$

$\therefore \angle A = \angle B = 30°$，$\angle C = 180° - 30° - 30° = 120°$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$2a = 4$$

$a = 2$，$\because \angle A = \angle B$，$\therefore a = b = 2$

答：$a = b = 2$

26. ΔABC中，已知$a=3$，$b=4$，$c=5$，求三角形之面積。

【作答】

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{4^2+5^2-3^2}{2\times4\times5}$$

$$=\frac{16+25-9}{40}=\frac{32}{40}=\frac{4}{5}$$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

ΔABC的面積$=\frac{1}{2}bc\sin A$

$$=\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{3}{5}=6$$

答：6 平方單位

27. 求證：ΔABC中，若$a\cos B-b\cos A=c$時，則ΔABC必定是直角三角形。

【證明】

$$\begin{aligned}
&a\cos B-b\cos A\\
&=a\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\
&=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\\
&=\frac{a^2+c^2-b^2-b^2-c^2+a^2}{2c}\\
&=\frac{2a^2-2b^2}{2c}\\
&=\frac{a^2-b^2}{c}
\end{aligned}$$

帶回算式$a\cos B-b\cos A=c$

$\frac{a^2-b^2}{c}=c$

$$\begin{aligned}
a^2-b^2&=c^2\\
a^2&=c^2+b^2
\end{aligned}$$

根據畢氏定理，ΔABC是直角三角形，故得證。

28. 求證：若$sin^2 A + sin^2 B = sin^2 C$，則$\Delta ABC$必為直角三角形。

【證明】

由正弦定理得知

$a = 2R\, sin\, A$
$b = 2R\, sin\, B$
$c = 2R\, sin\, C$

$\Rightarrow sin\, A = \frac{a}{2R}$

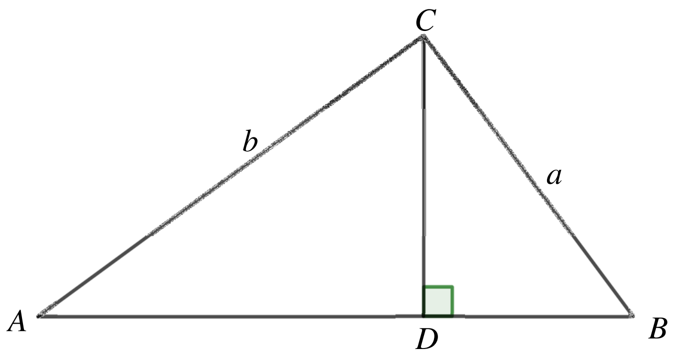
$sin\, B = \frac{b}{2R}$

$sin\, C = \frac{c}{2R}$

$sin^2 A + sin^2 B = sin^2 C$
$\Rightarrow (\frac{a}{2R})^2 + (\frac{b}{2R})^2 = (\frac{c}{2R})^2$
$\frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} = \frac{c^2}{4R^2}$
$a^2 + b^2 = c^2$

根據畢氏定理，ΔABC是直角三角形，故得證。

29. 求證：ΔABC中，當$a\cos B = b\cos A$，則$a = b$



【證明】

令$\overline{CD} \perp \overline{AB}$，

則$a\cos B = \overline{BD}$

$b\cos A = \overline{AD}$

$\because a\cos B = b\cos A$

$\therefore \overline{BD} = \overline{AD}$

由此可證明$\Delta CAD \cong \Delta CBD$

$\therefore a = b$

故得證。

30. ΔABC中，已知$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$及a、b，求c。

【解題】

由正弦定理得知

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$
$$c\sin A=a\sin C$$
$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

答：

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

31. ΔABC中，已知b、c、$\angle A$，求a、$\angle B$及$\angle C$。

【解題】

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$$

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，可求得$\angle B$

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，可求得$\angle C$

32. ΔABC中，已知a、b、c，求$\angle A$、$\angle B$及$\angle C$。

【解題】

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\angle A=arc\cos(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})$

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\angle B=arc\cos(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})$

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，$\angle C=arc\cos(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})$

33. ΔABC中，已知b、c、$\angle B$，求a、$\angle A$及$\angle C$。

【解題】

由正弦定理得知

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$b \sin C = c \sin B$$

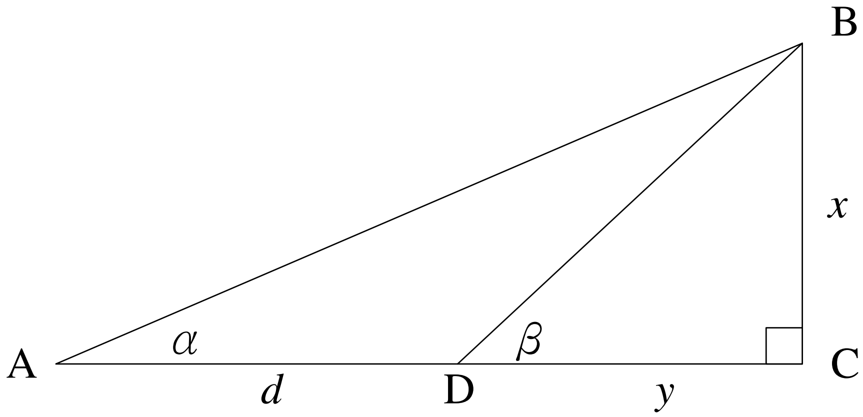
$\sin C = \frac{c}{b} \sin B$，可求得$\angle C$

$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$，可求得$\angle A$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\therefore a = b \frac{\sin A}{\sin B}$$

34. 如圖，已知α、β及 d，求x



【解答】

$\because tan\,\beta = \frac{x}{y}$, $\therefore\ y = \frac{x}{tan\,\beta} = x\,cot\,\beta$-------(1)

$\because tan\,\alpha = \frac{x}{y+d}$，$\therefore y + d = \frac{x}{tan\,\alpha} = x\,cot\,\alpha$-------(2)

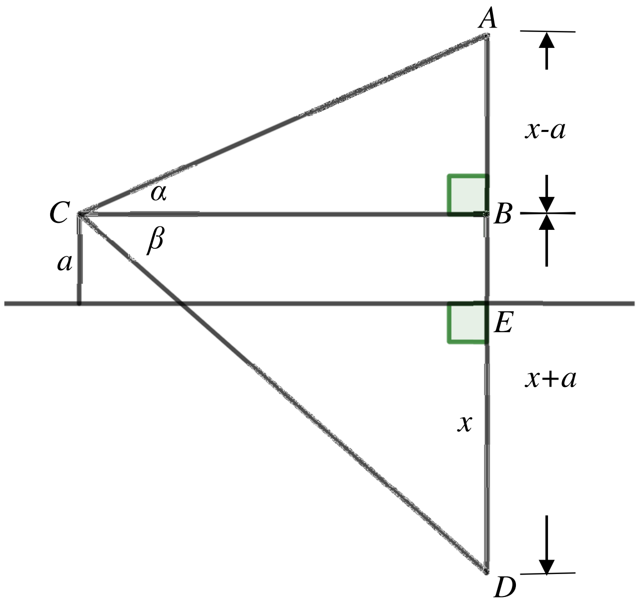
(2) - (1)，

$d = x\,cot\,\alpha - x\,cot\,\beta = x(cot\,\alpha - cot\,\beta)$

$$x = \frac{d}{cot\,\alpha - cot\,\beta}$$

答：$x = \frac{d}{cot\,\alpha - cot\,\beta}$

35. 如圖，已知α、β、a，$\overline{AE}=\overline{DE}=x$，求$x$。



【解答】

ΔABC中，$\frac{x-a}{\overline{BC}}=\tan\alpha$-------(1)

ΔBCD中，$\frac{x+a}{\overline{BC}}=\tan\beta$-------(2)

由(1)，$\overline{BC}=\frac{x-a}{\tan\alpha}$

由(2)，$\overline{BC}=\frac{x+a}{\tan\beta}$

$$\therefore \frac{x-a}{\tan\alpha}=\frac{x+a}{\tan\beta}$$

$$(x-a)\tan\beta=(x+a)\tan\alpha$$

$$x\tan\beta-a\tan\beta=x\tan\alpha+a\tan\alpha$$

$$x\tan\beta-x\tan\alpha=a\tan\beta+a\tan\alpha$$

$$x(\tan\beta-\tan\alpha)=a(\tan\beta+\tan\alpha)$$

$$x=\frac{a(\tan\beta+\tan\alpha)}{\tan\beta-\tan\alpha}$$

答：$x=\frac{a(\tan\beta+\tan\alpha)}{\tan\beta-\tan\alpha}$