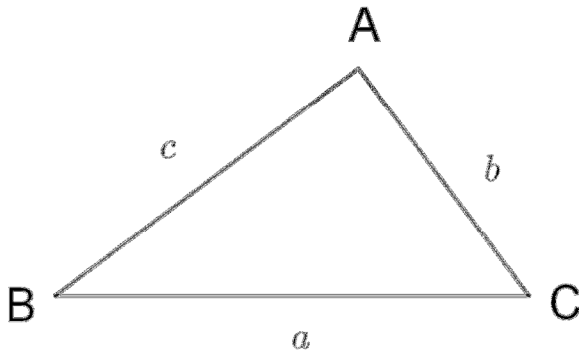


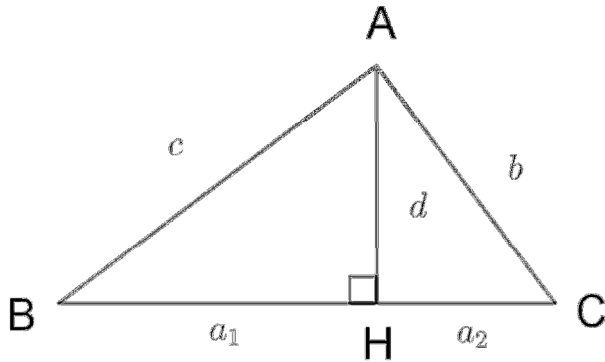
(13) 三角函數和三角形

請看下圖



假設我們已知 $\angle B$ 的大小，也知道 a 與 c 的長度，我們如何能知道 b 的長度呢？

我們通過 A 點，做一直線垂直於 \overline{BC} ， $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ，如下圖。



我們令 $\overline{AH} = d$ ， $\overline{BH} = a_1$ ， $\overline{HC} = a_2$

因為我們已知 $\angle B$ 的大小，因此可知

$$\cos B = \frac{a_1}{c}$$

$$a_1 = c \cos B$$

$$\therefore a_2 = a - c \cos B$$

我們又知道

$$\sin B = \frac{d}{c}$$

$$\therefore d = c \sin B$$

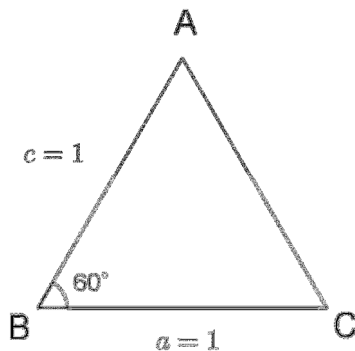
$$b^2 = a_2^2 + d^2$$

$$\begin{aligned}
&= (a - c \cos B)^2 + c^2 \sin^2 B \\
&= a^2 - 2ac \cos B + c^2 \cos^2 B + c^2 \sin^2 B \\
&= a^2 - 2ac \cos B + c^2 (\cos^2 B + \sin^2 B) \\
&= a^2 - 2ac \cos B + c^2
\end{aligned}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$$

例 1 : $a = 1, c = 1, \angle B = 60^\circ$

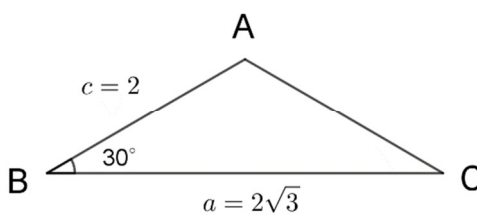
$$\begin{aligned}
b &= \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B} \\
&= \sqrt{1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2 - 1} \\
&= \sqrt{1} \\
&= 1
\end{aligned}$$



∴ $\square ABC$ 是一個正三角形

例 2 : $a = 2\sqrt{3}, c = 2, \angle B = 30^\circ$

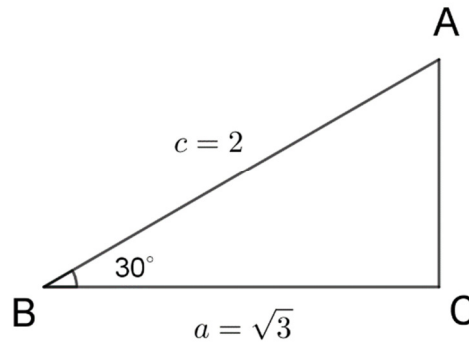
$$\begin{aligned}
b &= \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B} \\
&= \sqrt{4 + 12 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \sqrt{16 - 4 \times 3} \\
&= \sqrt{4} \\
&= 2
\end{aligned}$$



∴ $\square ABC$ 是一個等腰三角形

例 3 : $c = 2$, $a = \sqrt{3}$, $\angle B = 30^\circ$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B} \\ &= \sqrt{3 + 4 - 2 \times \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{7 - 6} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$



$\therefore \square ABC$ 是一個直角三角形

餘弦定理

根據以上的討論，我們可得餘弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

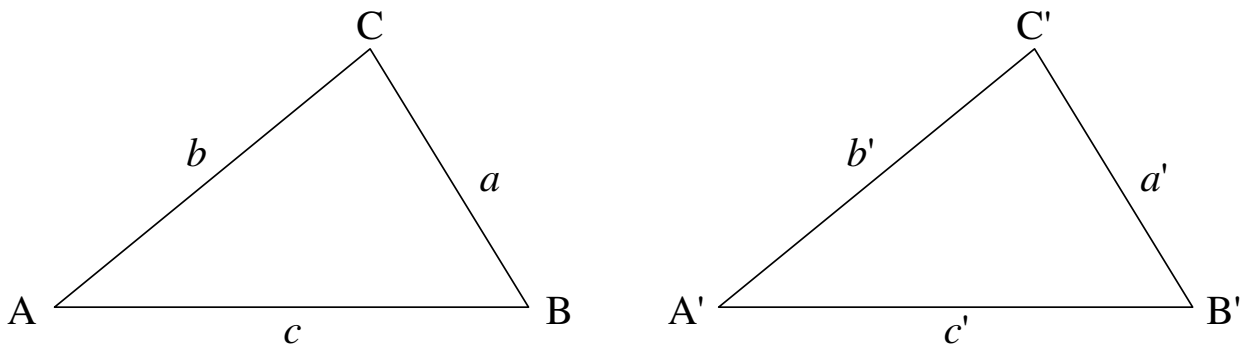
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

餘弦定理在幾何上有兩個意義：

(1) 三角形中，如果已知兩邊夾一角，則可根據餘弦定理確定三邊相等，因此可以

得到幾何中的 SAS 定理，如下圖：



若 $\angle A = \angle A'$ ， $b = b'$ 以及 $c = c'$ ，根據餘弦定理，可知 $a = a'$ ，因此可得

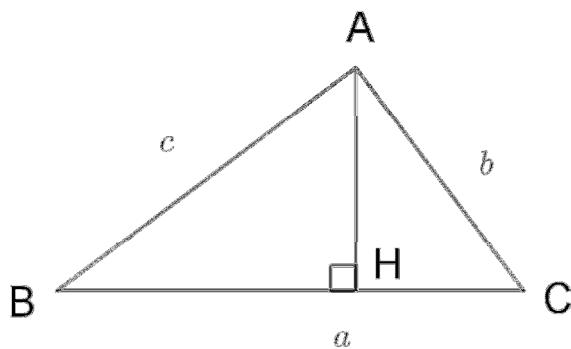
$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

(2)如果三角形中，已知三邊 a 、 b 及 c ，則所有的角都可確定。以 A 角為例，

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

因為 a 、 b 、 c 都已確定，因此 $\cos A$ 可以確定， $\angle A$ 也就可以確定了。

三角函數和三角形面積



三角形面積是 $\frac{1}{2}\overline{AH} \cdot a$

$$\text{但 } \sin B = \frac{\overline{AH}}{c}$$

$$\therefore \overline{AH} = c \sin B$$

令三角形的面積為 M ，則

$$M = \frac{1}{2}\overline{AH} \cdot a = \frac{1}{2}ac \sin B$$

同理可以證明

$$M = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$\text{以及 } M = \frac{1}{2}bc \sin A$$

最後可得

$$M = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

也就是說，如果已知兩邊夾一角，即可求出三角形的面積。

$$\text{例 4: } a = 4, b = 2, \sin C = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{1}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

正弦定理

$$\text{因為 } \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

我們可以將以上的公式除以 abc

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{abc} \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{ac}{abc} \sin B = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{abc} \sin C$$

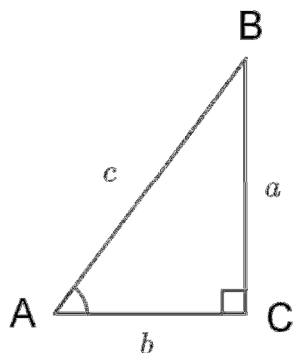
$$\text{可得 } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

正弦定理就是

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

正弦定理的意義

要知道正弦定理的意義，我們先從直角三角形談起。



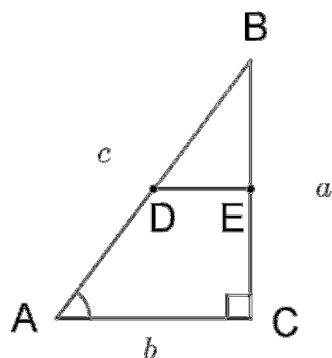
如上圖，我們得知

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = c$$

我們取 \overline{AB} 的中點 D ，畫一條平行於 \overline{AC} 的直線，相交 \overline{BC} 於 E 點，也連接了 \overline{DC} ，如下

圖：



只要懂得如何證明三角形，就可以證明

$$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{DB}$$

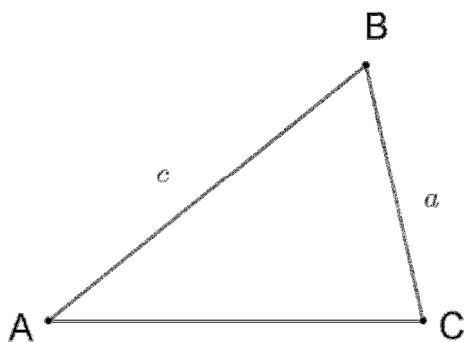
因此可以得知 D 點是 $\triangle ABC$ 外接圓的圓心，或者我們可以說 c 是這外接圓的直徑，因

$$\text{此} \frac{a}{\sin A} = c = 2r$$

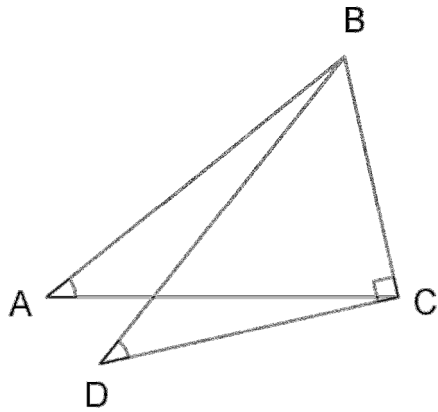
以上公式中的 r 是外接圓的半徑

有了這個認識，我們可以探討任何三角形中 $\frac{a}{\sin A}$ 的意義，請看下圖。假設我們有一

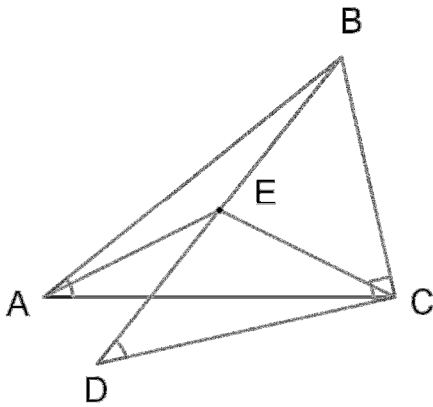
個任意的三角形 ABC 。



我們畫一條直線，通過C點，垂直於 \overline{BC} ，



然後決定D，使 $\angle BDC = \angle A$ 。



最後，取 \overline{BD} 的中點E，從以上的討論，我們可以得知， \overline{BD} 是三角形BDC的直徑，換言之， $\overline{BE} = \overline{EC}$ 。我們再考慮 $\triangle ABC$ ，因為 $\overline{BE} = \overline{EC}$ ，E一定也是 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $\overline{BE} = \overline{CE} = \overline{AE} = r = \triangle ABC$ 外接圓的半徑。

$\triangle BDC$ 是直角三角形

$$\therefore \sin D = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{a}{2r}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin D} = 2r, \text{ 又 } \angle D = \angle A \therefore \frac{a}{\sin A} = 2r$$

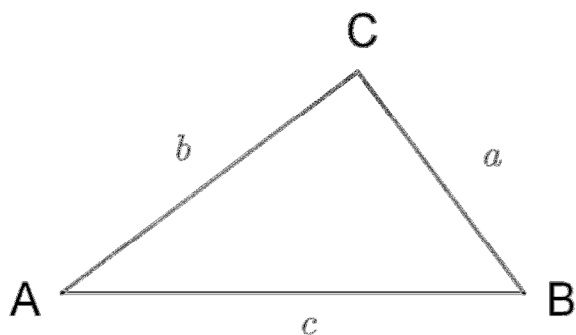
我們證明了一點，對於任何一個三角形，令 r 是此三角形外接圓的半徑，則

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

正弦定理在三角形全等證明上的應用

例：兩角夾一邊

假設已知 $\angle A$ 和 $\angle B$ 以及邊 C



因為 $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$ ，所以 $\angle C$ 也是已知的，根據正弦定理

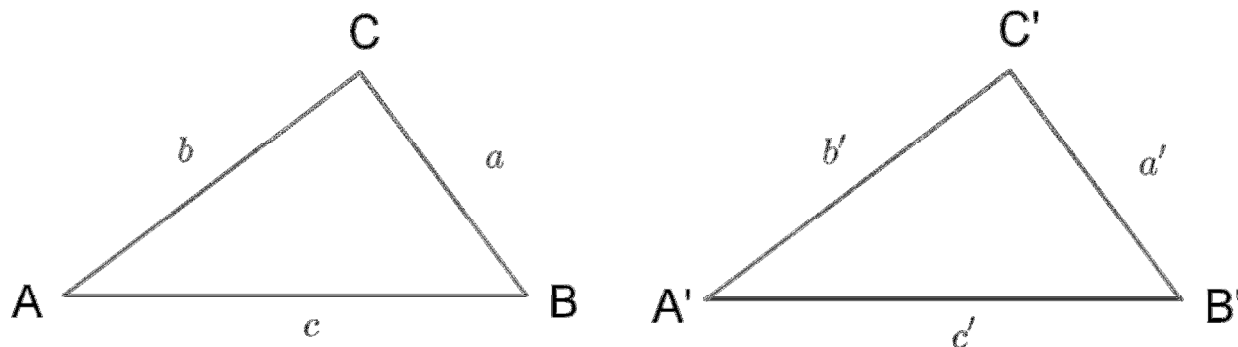
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\therefore a = c \cdot \frac{\sin A}{\sin C}$$

因為 c 、 $\sin A$ 和 $\sin C$ 都是已知的，因此 a 可以決定。同理可以知道 b 也可以求得。

正弦定理和幾何的 ASA 定理

從以上的討論，可以知道一旦兩角夾一邊是已知的，則這三角形的形狀就可以確定了。

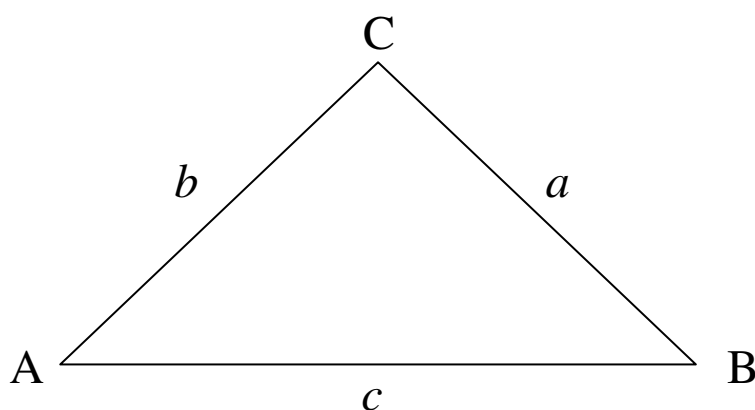
在幾何中，假設我們有兩個三角形，如下圖。



已知 $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ， $c = c'$ ，我們根據以上的討論，得知 $a = a'$ 及 $b = b'$ ，因此這兩個三角形是全等的，這就是幾何學中的 ASA 定理。

正弦定理和等腰三角形

假設 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \angle B$



因為 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，而且 $\sin A = \sin B$

$$\therefore a = b$$

在幾何中，三角形的兩底角相等，則此三角形一定是等腰三角形。這個定理可以從正弦定理求得。

同理，如果我們知道 $a = b$ ，則 $\angle A = \angle B$

假設我們已知 $a = b = c$ ，我們可以根據正弦定理得到 $\angle A = \angle B = \angle C$