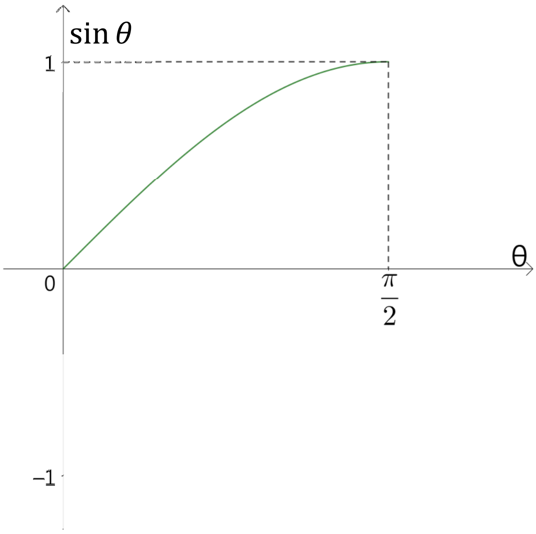
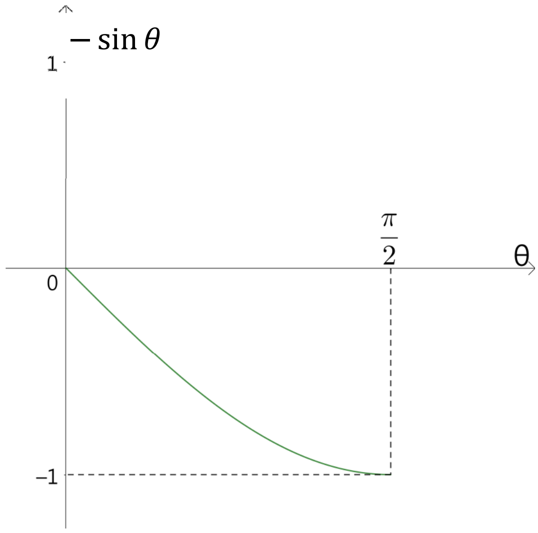
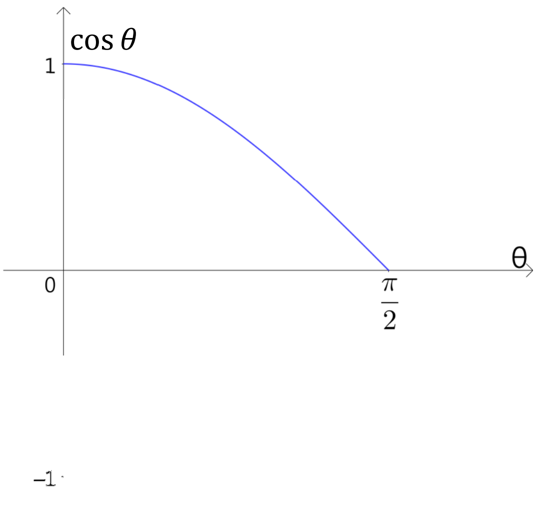
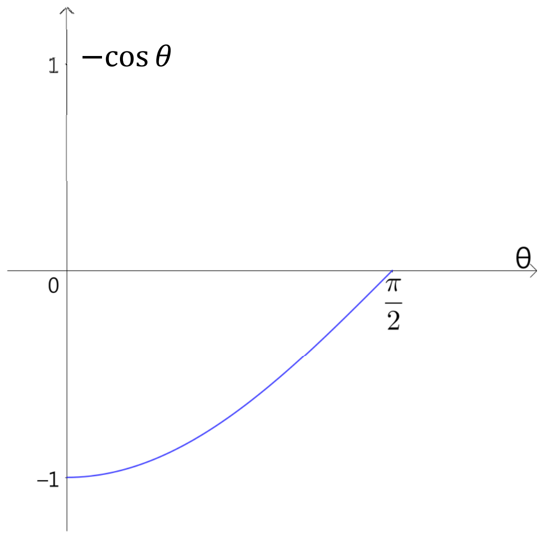
(12) 三角函數的週期性

我們再溫習一下三角函數的一些特性，假設θ為銳角，以下的圖形是很重要的：









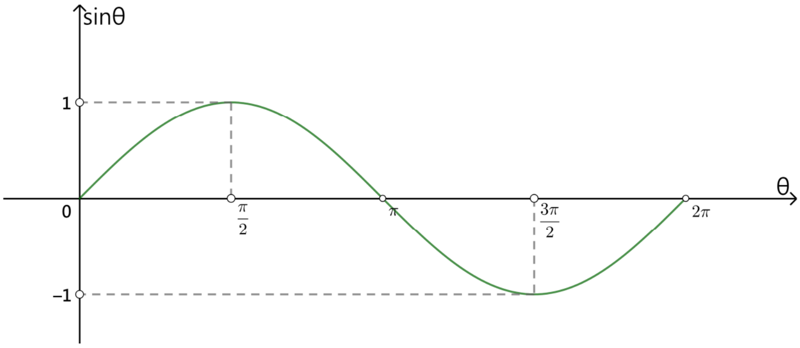
我們先假設有一個銳角α，

我們可以得到一張表

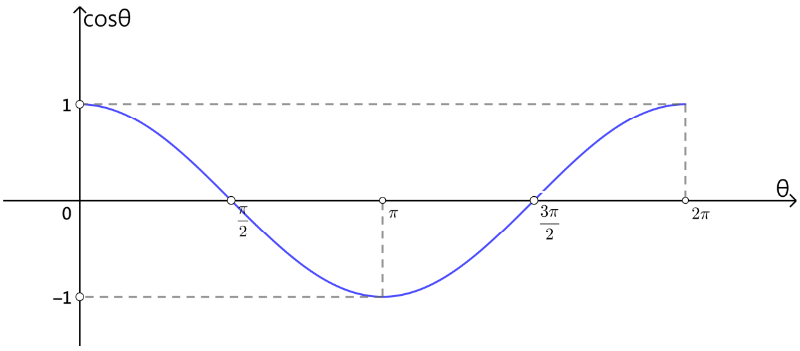
	$\theta=\alpha$	$\theta=\alpha+\frac{\pi}{2}$	$\theta=\alpha+\pi$	$\theta=\alpha+\frac{3\pi}{2}$

$\sin\theta$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\theta$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$

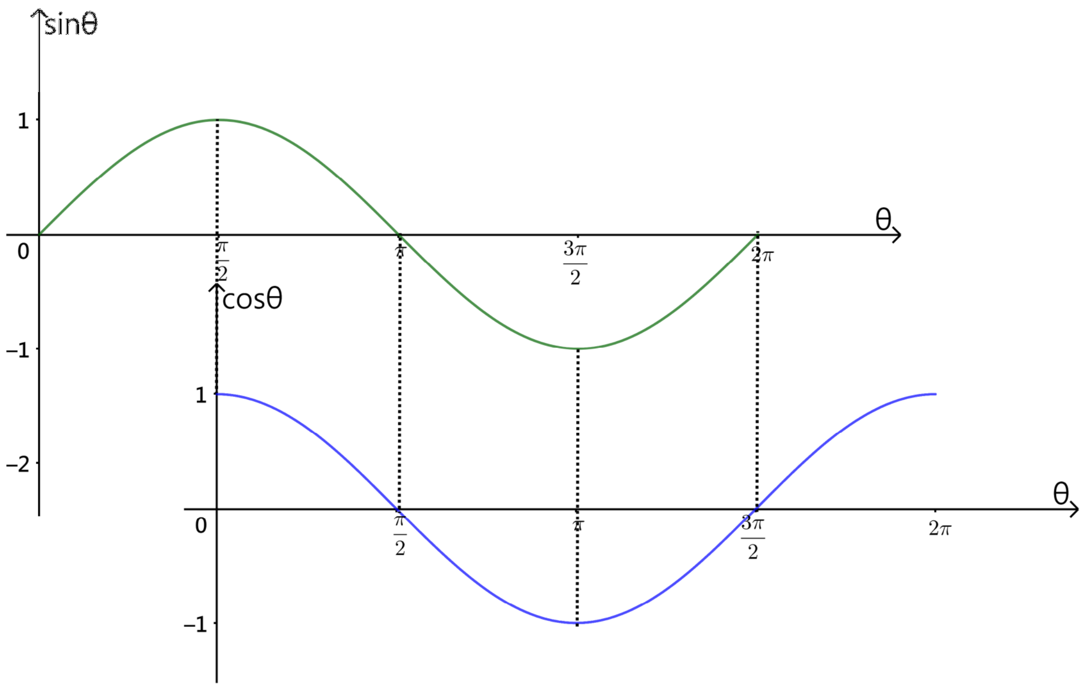
根據以上的表，我們可以看出 sinθ 的週期



也可以看出 cosθ 的週期



我們從上面兩個圖重疊後得到下圖，

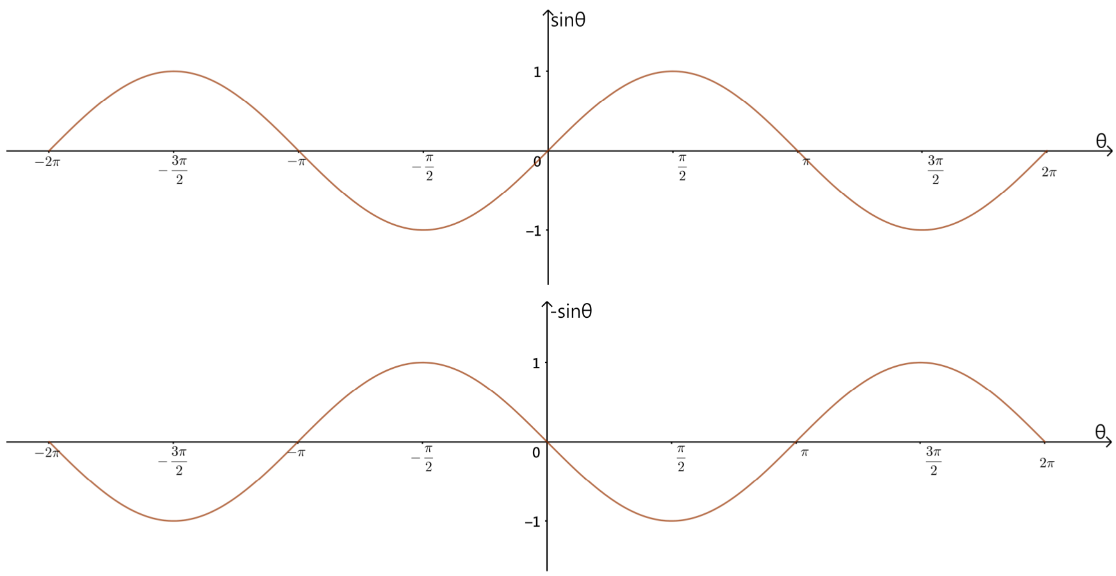


可以看出 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 相差 90°，除了有 θ，也可以有 $-\theta$，就可得

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

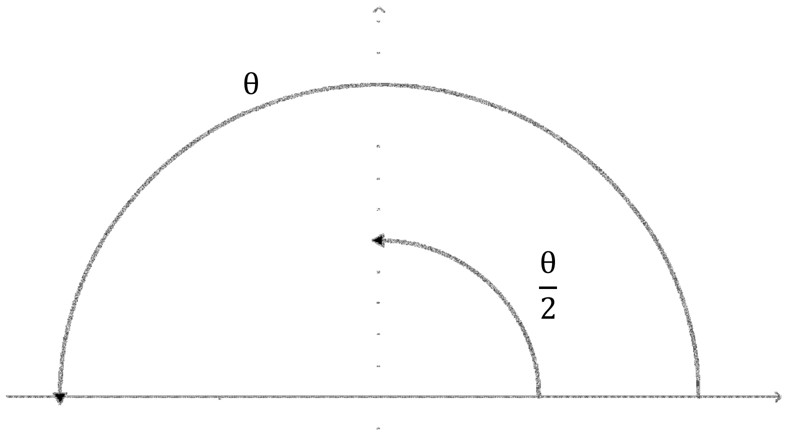
$\cos(-\theta)=-\cos\theta$

因此我們有以下的圖：

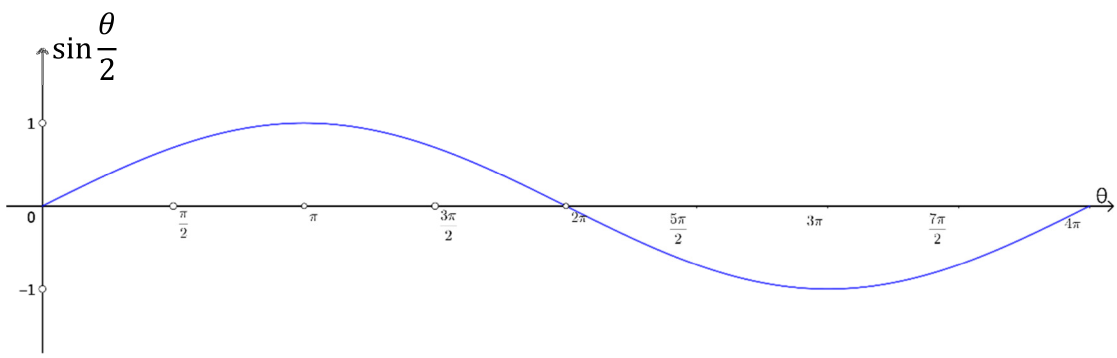


$y=\sin\frac{\theta}{2}$的圖形

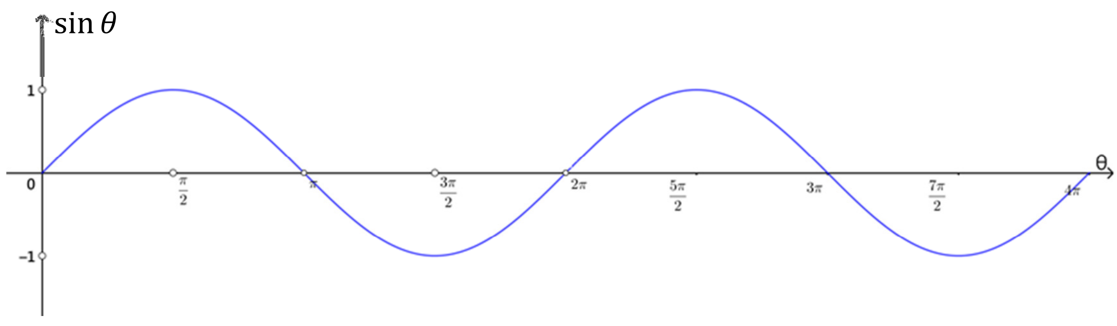
我們首先該弄清楚$y=\sin\frac{\theta}{2}$的意義，假如$\theta=90°$，$\frac{\theta}{2}$只有 45°，如果 $\theta=180°$，$\frac{\theta}{2}$只有 90°，以下的圖可以使同學對$\frac{\theta}{2}$有一些感覺



如上圖所示，$\sin\frac{\theta}{2}$的變化一定要比 sinθ 慢，請看，$\sin\frac{\theta}{2}$與 sinθ 的變化圖如下

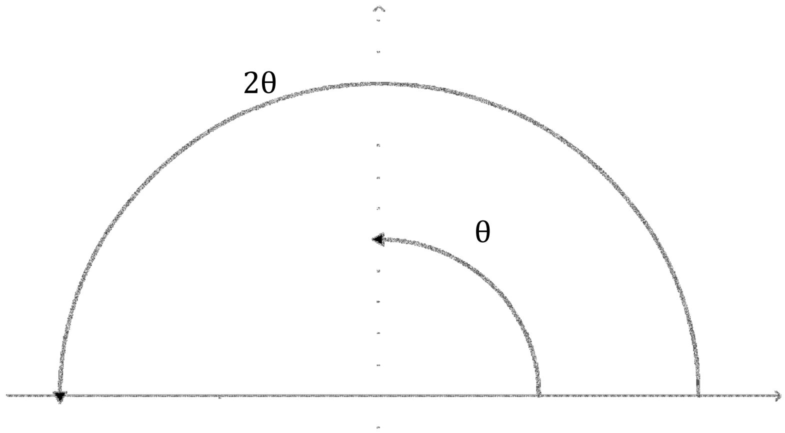


再看 sinθ

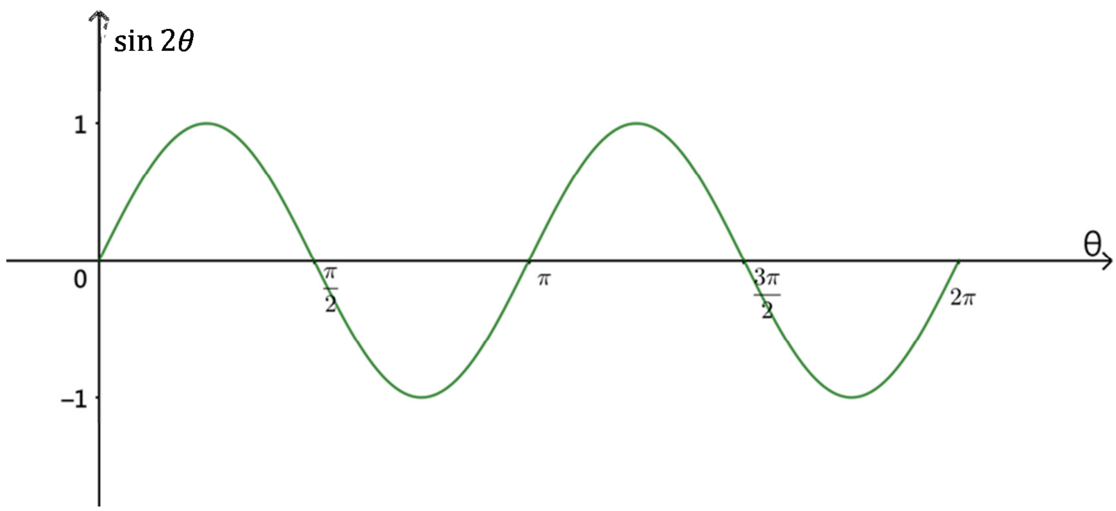


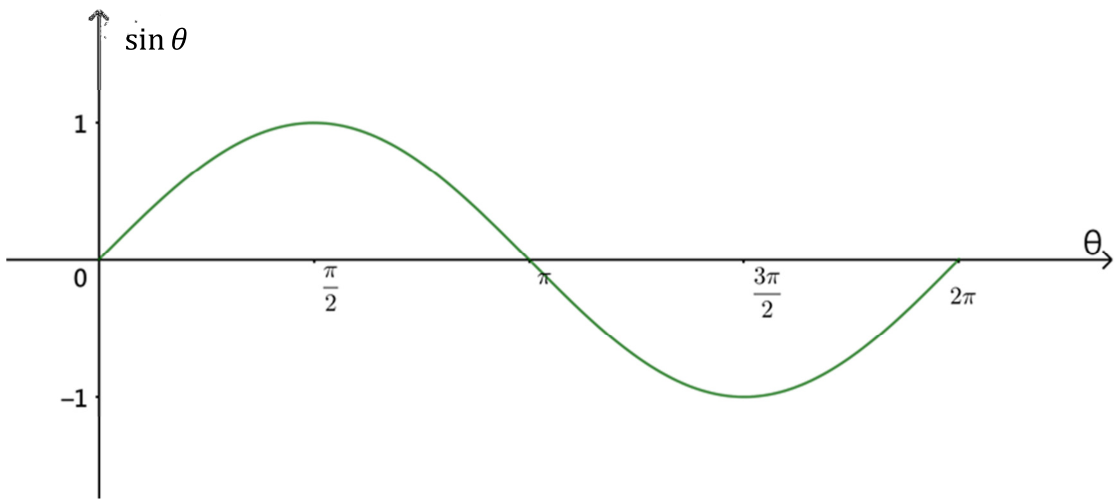
也就是說，$\sin\frac{\theta}{2}$的一個週期等於 $\sin\theta$ 的兩個周期，以馬達為例，$\sin\frac{\theta}{2}$這個馬達轉了一圈，$\sin\theta$這個馬達已經轉了兩圈。

$\sin 2\theta$則相反，請見下圖



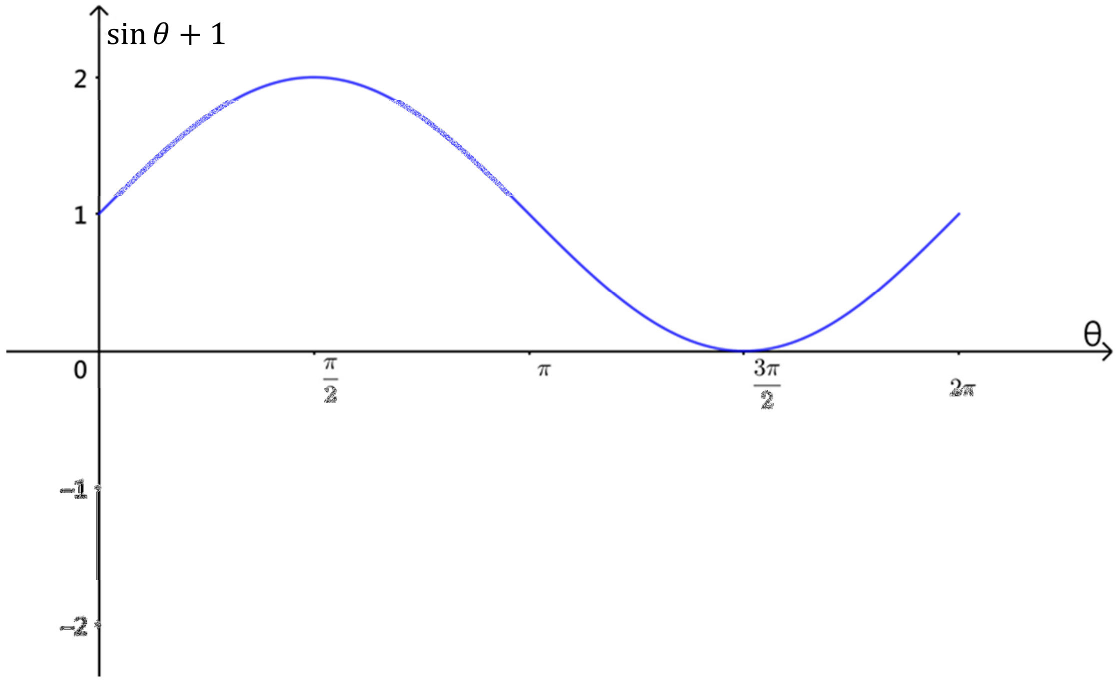
因此，$\sin 2\theta$的變化速度大於$\sin\theta$的變化速度，如下圖所示

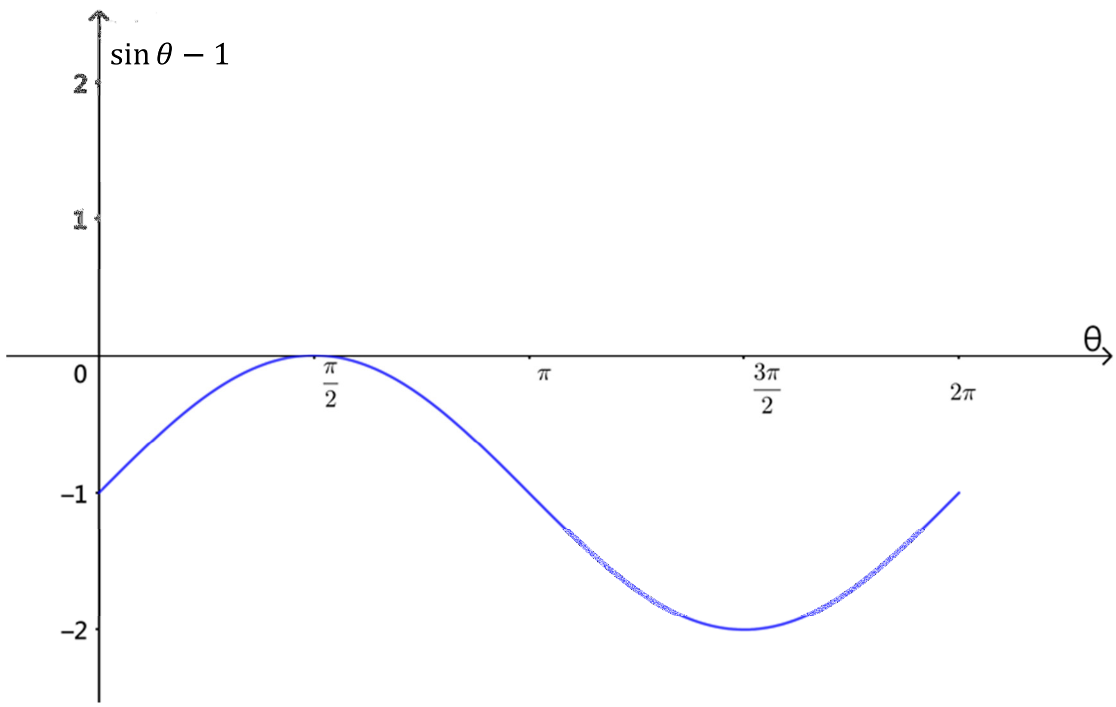




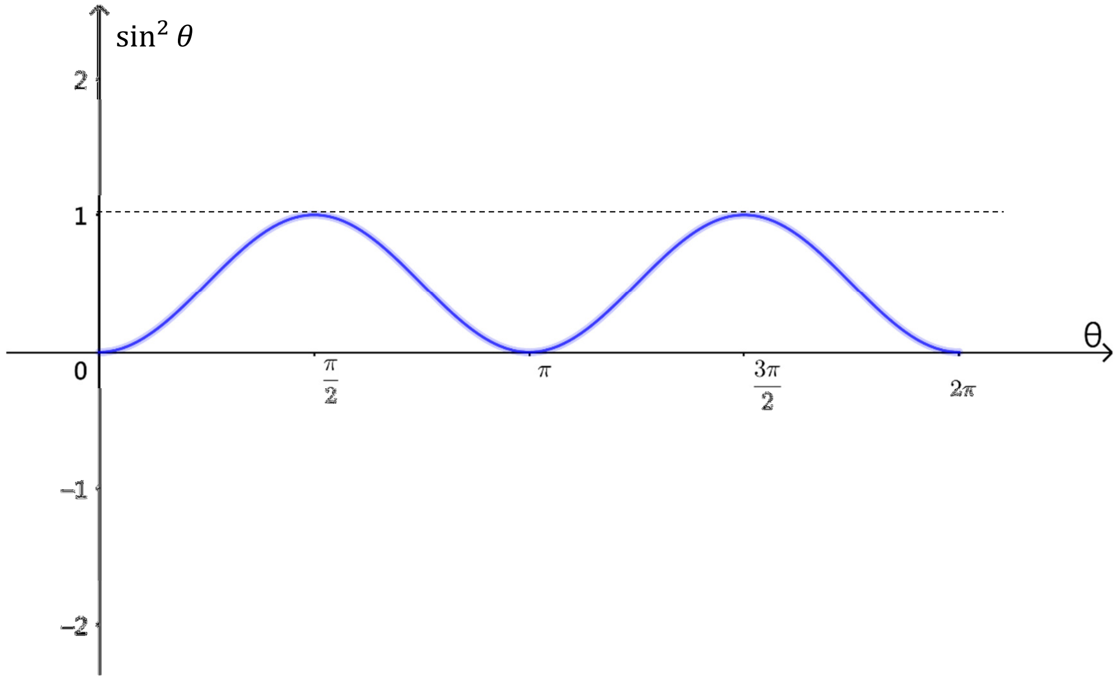
$\sin 2\theta$的週期是$\sin\theta$的半個週期，以馬達為例，$\sin 2\theta$這個馬達的轉速是$\sin\theta$轉速的兩倍。

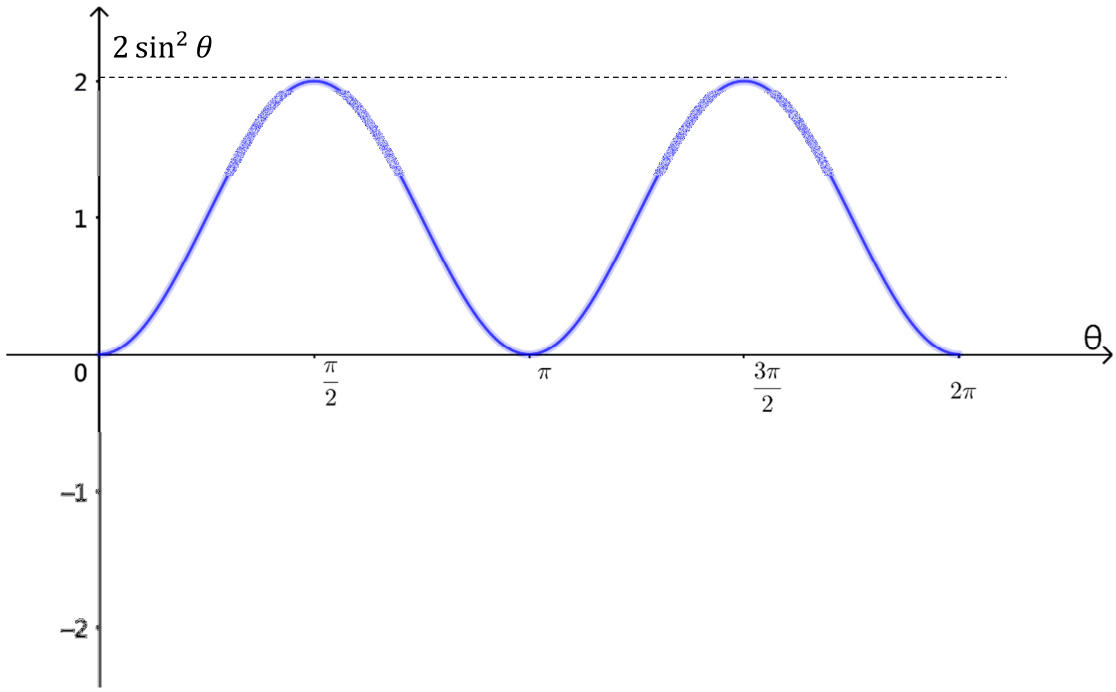
$\sin\theta+1$與$\sin\theta-1$的圖如下

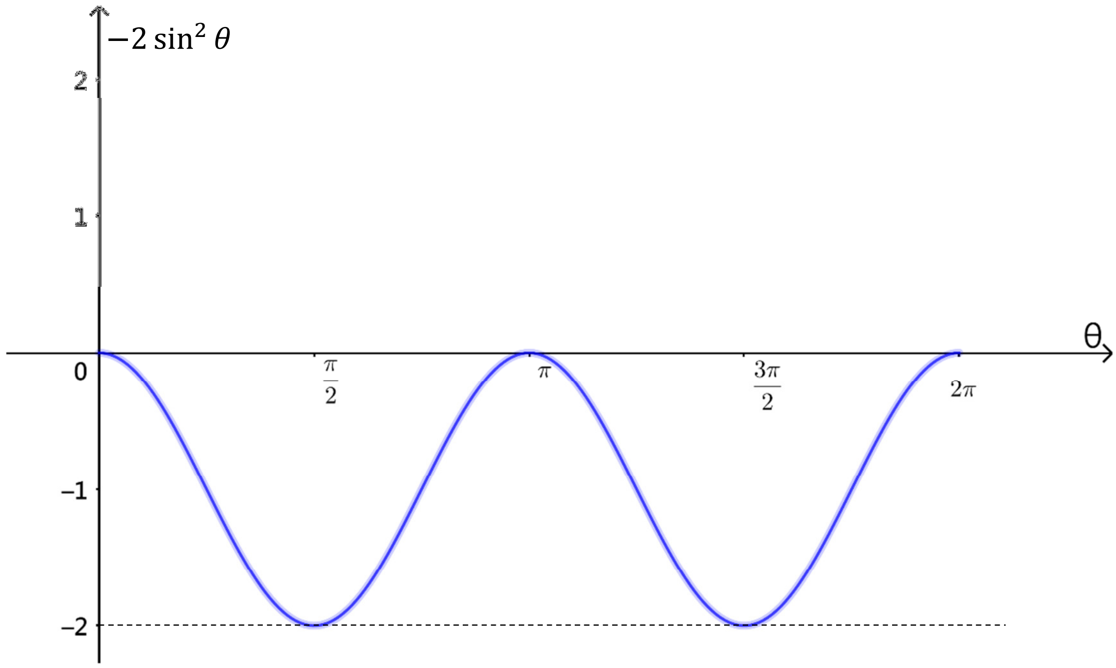




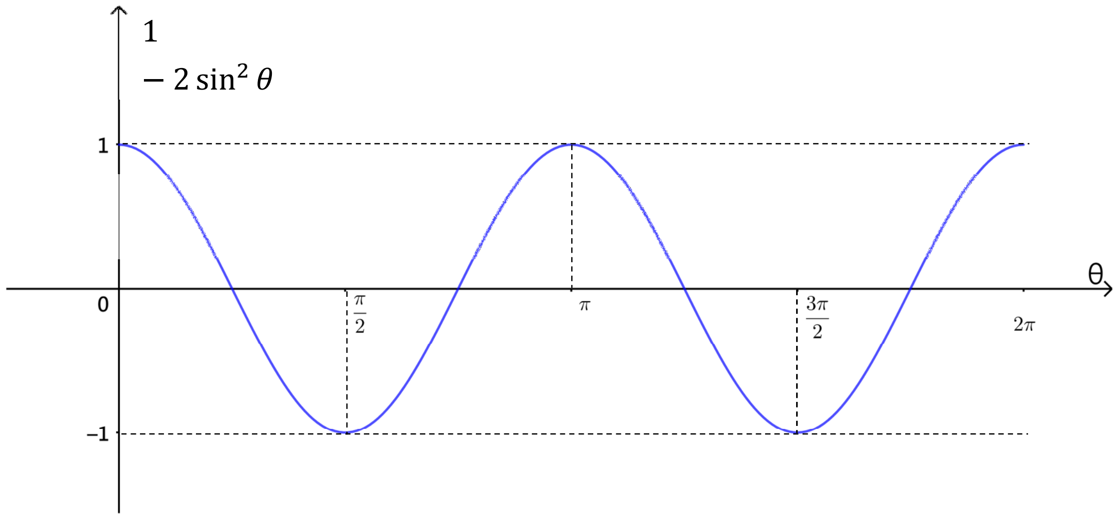
我們現在看$\sin^2\theta$，$\sin\theta$原來是有負數，但$\sin^2\theta$只有正值，如下圖


$\sin^2\theta$
2
1
0
−1
−2
θ
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π


$2\sin^2\theta$
2
1
0
−1
−2
θ
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π



$1-2\sin^2\theta=-2\sin^2\theta+1$，我們將$-2\sin^2\theta$往上移一格



我們應該發現以上的圖形其實是$\cos 2\theta$的圖形，因此可以說

$1-2\sin^2\theta=\cos 2\theta$，這個公式以後會討論到，我們可以做幾個實驗

例 1　θ = 30°，

$$\cos 2\theta=\cos 60°=\frac{1}{2}$$

$$1-2\sin^2\theta=1-2\sin^2 30°=1-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 1-2\sin^2 30°=\cos 60°$$

例 2　θ = 45°，

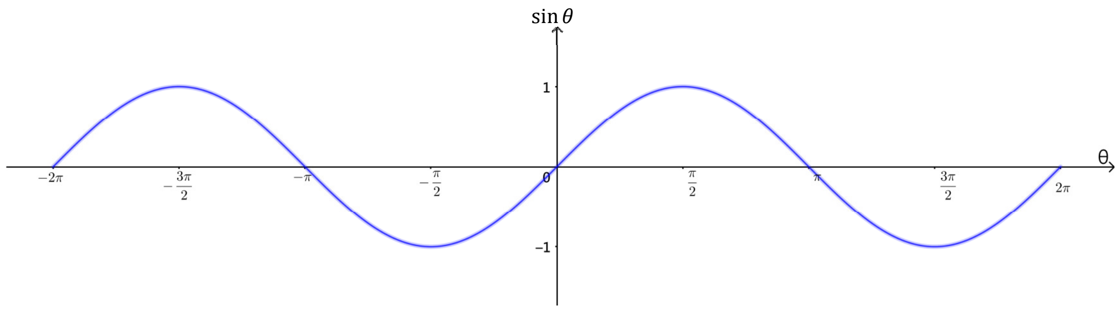
$$\cos 2\theta = \cos 90° = 0$$

$$1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\sin^2 45° = 1 - 2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - 1 = 0$$

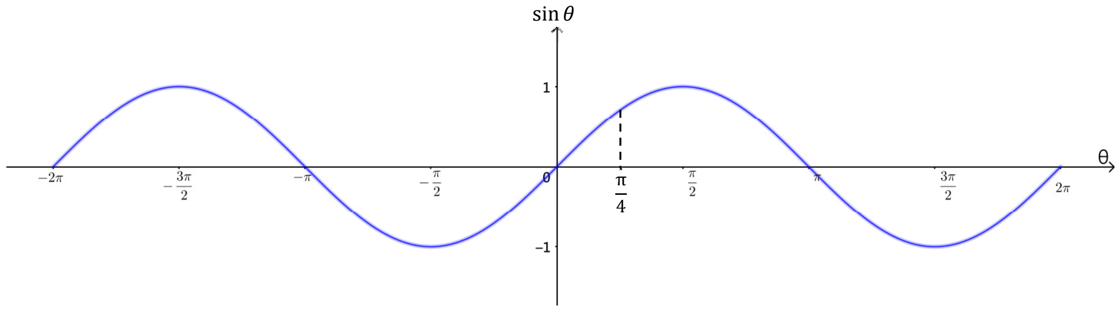
$$\therefore 1 - 2\sin^2 45° = \cos 90°$$

三角函數的平移

我們要看$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$的圖形，先畫$\sin\theta$的圖形

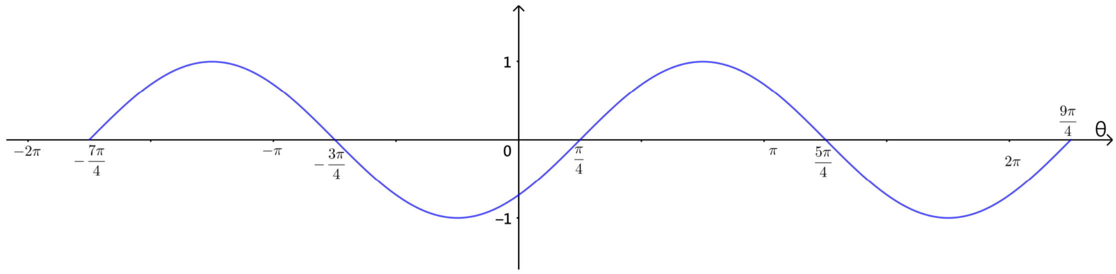


我們看出，當θ = 0時，$\sin\theta = 0$，而且可以將θ = 0看成$\sin\theta$的起點。因此我們考慮$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$時，會問，何時θ = 0?答案是$\theta = \frac{\pi}{4}$。因此我們知道，對$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$而言，$\theta = \frac{\pi}{4}$是它的起點。

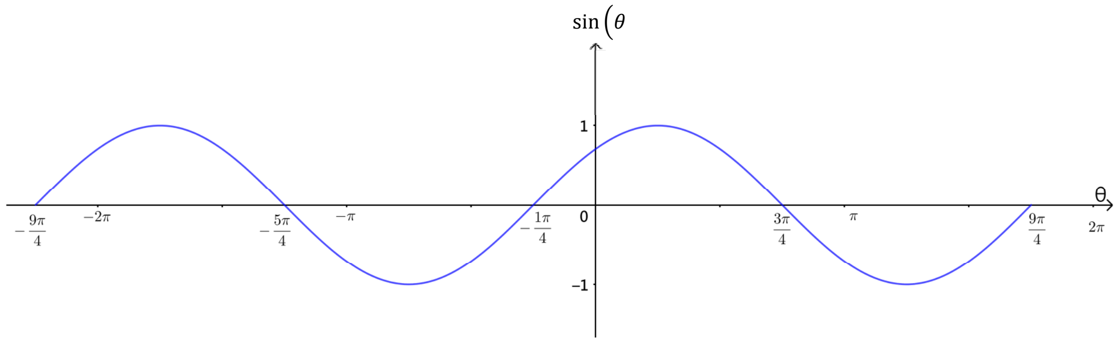


然後我們將$\sin\theta$的起點移至$\theta = \frac{\pi}{4}$的地方

sin(θ



同理$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$的圖形一定如下圖



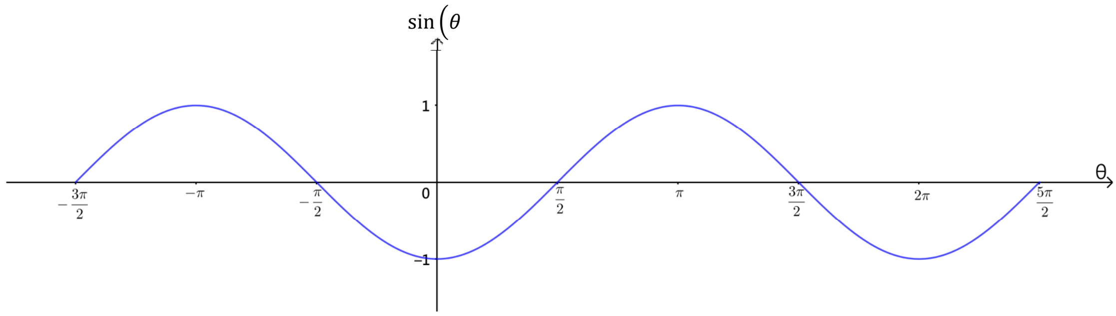
我們可以得一結論：

(1) $\sin(\theta-\alpha)$的圖形，是將$\sin\theta$向右移 α 格

(2) $\sin(\theta+\alpha)$的圖形，是將$\sin\theta$向左移 α 格，

　$\cos(\theta\pm\alpha)$的圖形，也可以用以上的規則求得

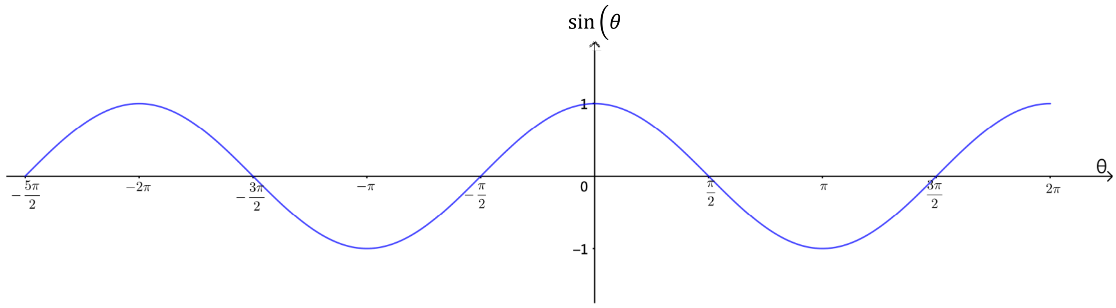
以下是$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$的圖形



大家一定可以看出以上的圖形也是$-\cos\theta$的圖形，這是應該的，因為

$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

以下是是$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$的圖形



以上的圖形也是$\cos\theta$的圖形，這是正確的，固為$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$