

(03) 直角坐標

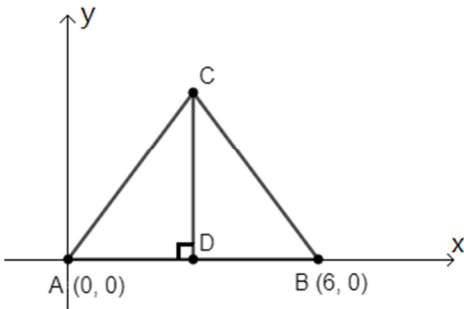
一、直角坐標應用

1. 直角坐標上，P 點坐標為(1, 3)，Q 點坐標為(2, 5)，則兩點距離為？

解：

$$\sqrt{(1-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

2. 如下圖， $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $\overline{AC} = \overline{BC} = 5$ ，求 C 點坐標。



解：

D 為 \overline{AB} 中點， $\triangle ADC$ 是直角三角形，故

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$$

$$5^2 = \overline{CD}^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$25 = \overline{CD}^2 + 3^2$$

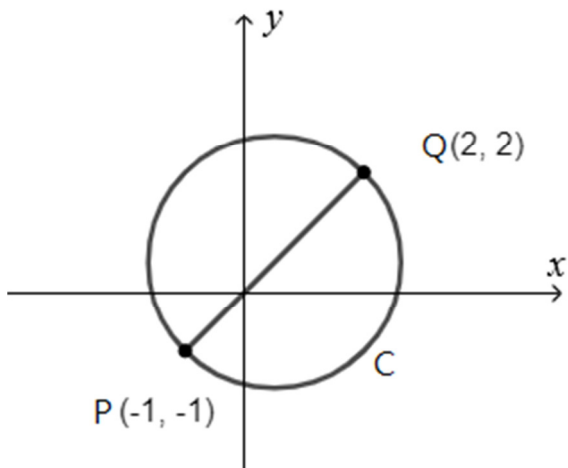
$$\overline{CD}^2 = 25 - 9$$

$$\overline{CD}^2 = 16$$

$$\overline{CD} = 4 \text{ (負不合)}$$

故 C 點坐標是(3, 4)

3. 如下圖， \overline{PQ} 是圓C的直徑，P點坐標為(-1, -1)，Q點坐標為(2, 2)，求圓C的半徑。

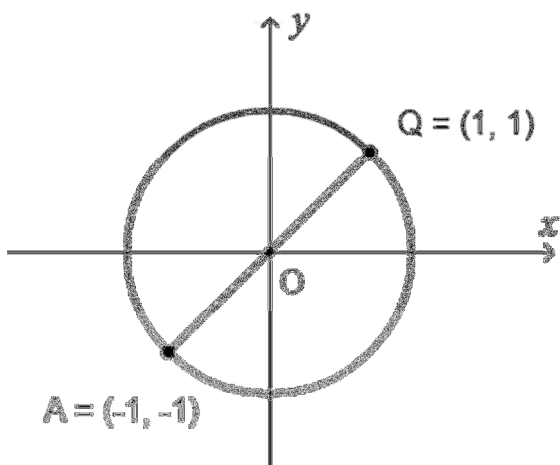


解：

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{圓C的半徑} = 3\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

4. 如下圖， \overline{PQ} 是圓O的直徑，P點坐標為(-1, -1)，Q點坐標為(1, 1)，求圓心O的坐標。

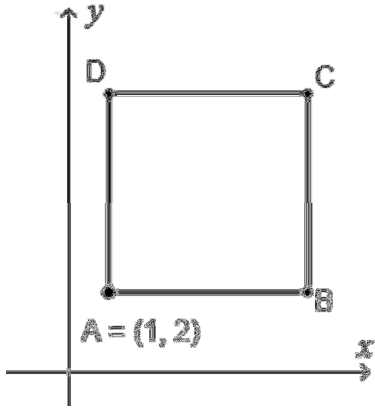


解：

$$O \text{ 點的 } x \text{ 坐標 : } O_x = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0, O \text{ 點的 } y \text{ 坐標 : } O_y = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

圓心 O 的坐標是 $(0, 0)$

5. 如下圖， $ABCD$ 是邊長為 5 的正方形， A 點坐標是 $(1, 2)$ ，求 B 、 C 、 D 點的坐標。



解：

$$B \text{ 點坐標 : } (1+5, 2) = (6, 2)$$

$$C \text{ 點坐標 : } (1+5, 2+5) = (6, 7)$$

$$D \text{ 點坐標 : } (1, 2+5) = (1, 7)$$

6. 接續 5.，求

(1) 通過 A 、 B 的直線方程式。(2) 通過 A 、 D 的直線方程式。

(3) 通過 B 、 C 的直線方程式。(4) 通過 B 、 D 的直線方程式。

解：

(1) 通過 A 、 B 的直線方程式是 $y=2$ 。

(2) 通過 A 、 D 的直線方程式是 $x=1$ 。

(3) $\overline{CD} // \overline{AB}$ ，通過 C 、 D 的直線方程式是 $y=7$ 。

(4) 設通過 B、D 的直線方程式為 $y=ax+b$ 。

將 B、D 坐標代入得聯立方程式

$$\begin{cases} 7 = a + b \\ 2 = 6a + b \end{cases}, \text{解得 } a = -1, b = 8$$

通過 B、D 的直線方程式是 $y = -x + 8$

7. 接續 5.，求通過 A、C 的直線方程式。

解：

設通過 A、C 的直線方程式為 $y=ax+b$ 。

將 A、C 坐標代入得聯立方程式

$$\begin{cases} 2 = a + b \\ 7 = 6a + b \end{cases}, \text{解得 } a = 1, b = 1$$

通過 A、C 的直線方程式是 $y = x + 1$

8. 接續 5.，正方形 ABCD 的對角線交點坐標。

解：

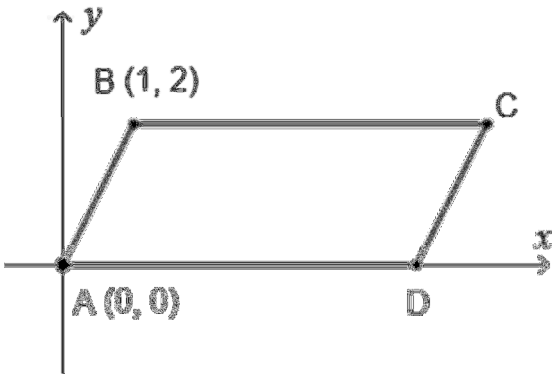
通過 B、D 的對角線直線方程式： $y = -x + 8$

通過 A、C 的對角線直線方程式： $y = x + 1$

解聯立方程式 $\begin{cases} y = -x + 8 \\ y = x + 1 \end{cases}$ ，解得 $x = \frac{7}{2}$ ， $y = \frac{9}{2}$

對角線交點坐標是 $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$

9. 如下圖，ABCD 是平行四邊形， $\overline{AD}=5$ ， \overline{AD} 平行 x 軸，求 C、D 點之坐標。



解：

依題意 $\overline{BC} = \overline{AD} = 5$ ， $\overline{AD} // \overline{BC}$

C 點坐標 $= (1+5, 2) = (6, 2)$

D 點坐標 $= (0+5, 0) = (5, 0)$

10. 接續 9.，求通過 C、D 的直線方程式。

解：

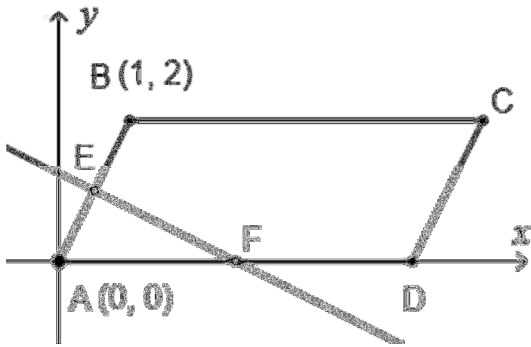
設通過 C、D 的直線方程式為 $y = ax + b$ 。

將 C、D 坐標代入得聯立方程式

$$\begin{cases} 2 = 6a + b \\ 0 = 5a + b \end{cases}, \text{ 解得 } a = \quad, b = \quad 10$$

通過 C、D 的直線方程式是 $y = 2x - 10$

11. 接續 9. , E 為 A、B 之中點, F 為 A、D 之中點, 求通過 E、F 的直線方程式。



解：

$$E \text{ 點坐標} = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$F \text{ 點坐標} = \left(\frac{0+5}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

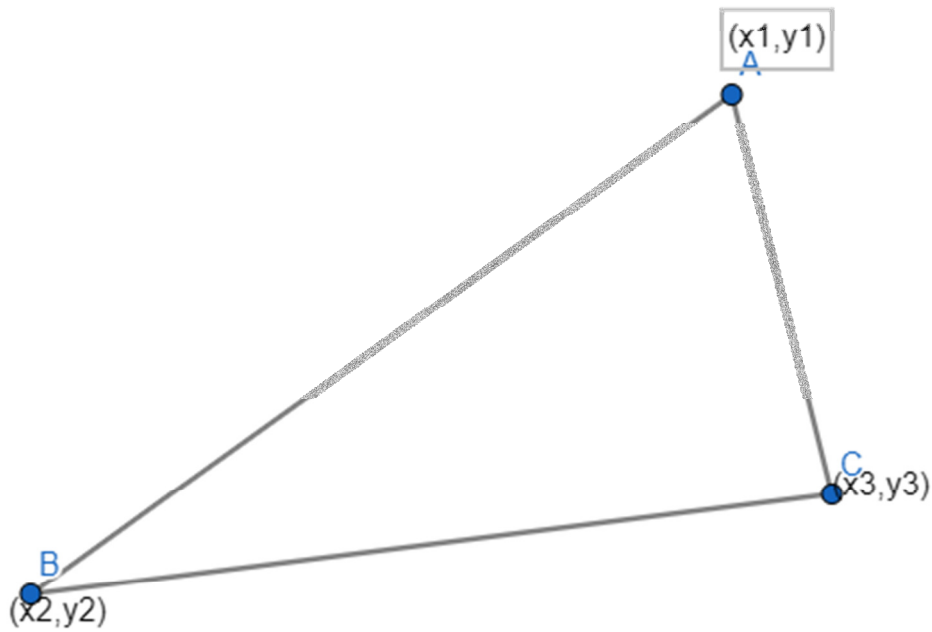
設通過 E、F 的直線方程式為 $y=ax+b$ 。

將 E、F 坐標代入得聯立方程式

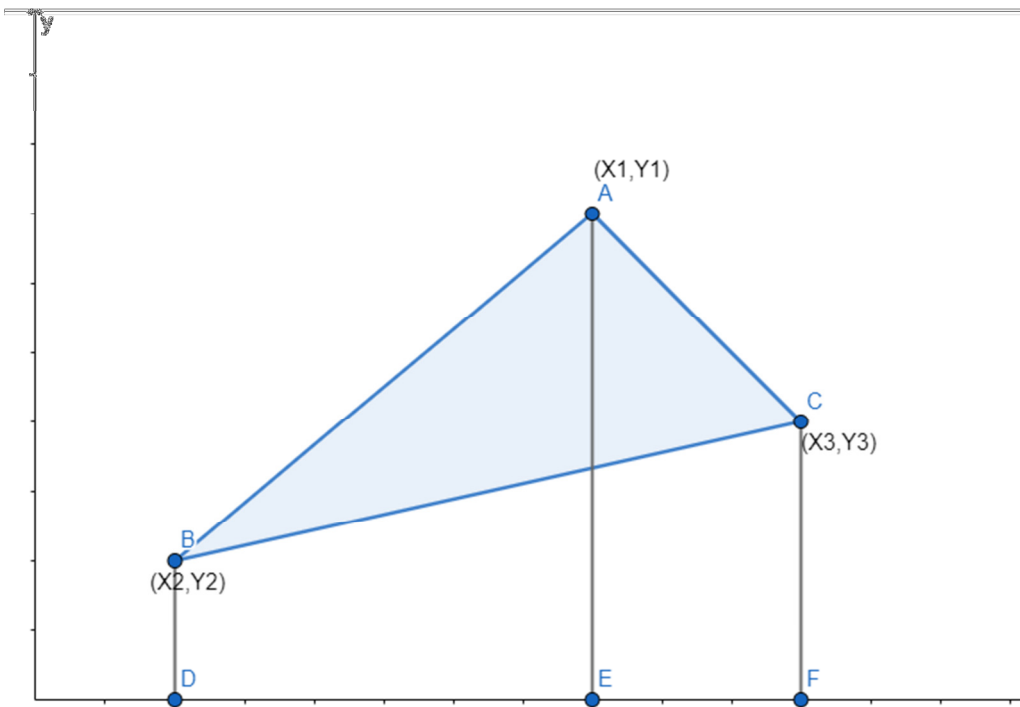
$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}a + b \\ 0 = \frac{5}{2}a + b \end{cases}, \text{ 解得 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{5}{4}$$

通過 E、F 的直線方程式是 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

已知三角形端點的座標，求三角形面積請看下圖；



ΔABC 各端點的座標已知了，我們要求這三角形的面積



$$\Delta ABC = ABDE + ACFE - BDFC \text{-----(1)}$$

$$ABDE = \frac{1}{2}(BD + AE)DE = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) \text{-----(2)}$$

$$ACFE = \frac{1}{2}(AE + CF)EF = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) \text{-----(3)}$$

$$BDFC = \frac{1}{2}(BD + CF)DE = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) \text{-----(4)}$$

將(2), (3), (4)代入(1)得

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} (x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)) \text{-----(5)}$$

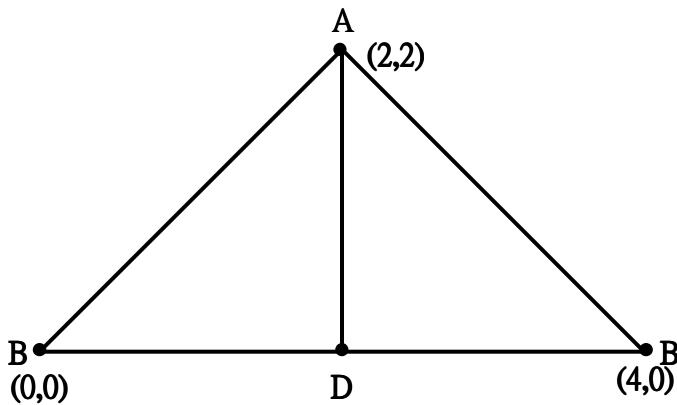
答案可能為負，需取絕對值。

(1) A=(2, 2), B=(0, 0), C=(4, 0)

$$x_1=2 \quad y_1=2$$

$$x_2=0 \quad y_2=0$$

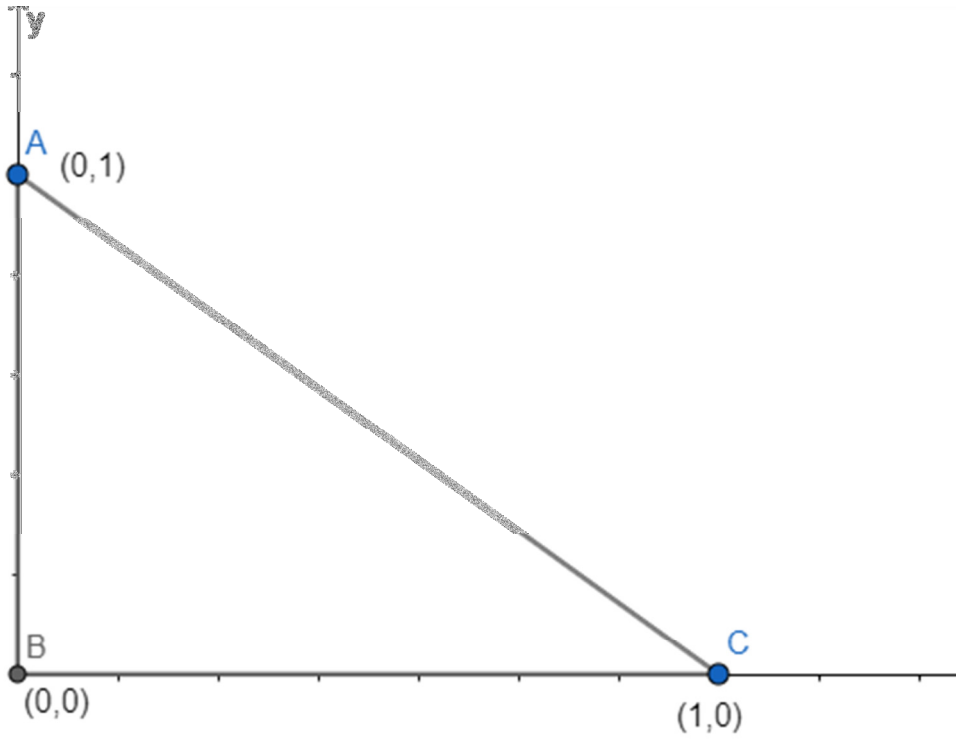
$$x_3=4 \quad y_3=0$$



$$\Delta ABC = \frac{1}{2} (x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)) = \frac{1}{2} (0(0-0) + 0(0-2) + 4(2-0)) = \frac{1}{2} (4*2) = 4$$

我們也可以用幾何方法證明這個答案是對的，因為 $\Delta ABC = \frac{1}{2} \overline{AD} * \overline{BC} = \frac{1}{2} (2)(4) = 4$

(2)



$$x_1=0 \quad y_1=1$$

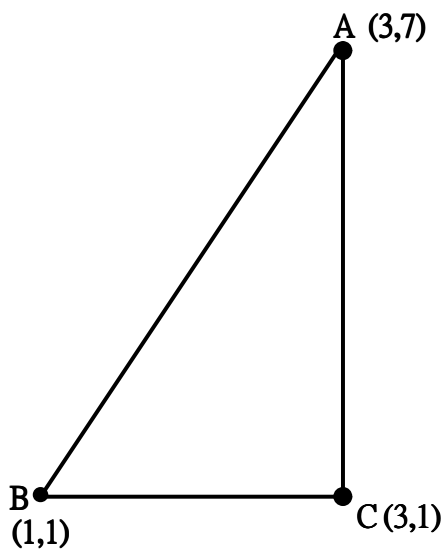
$$x_2=0 \quad y_2=0$$

$$x_3=1 \quad y_3=0$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} (x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)) = \frac{1}{2} (0(0 - 0) + 0(0 - 1) + 1(1 - 0)) = \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$$

這個答案也可以用幾何得到 $\Delta ABC = \frac{1}{2} \overline{AB} * \overline{BC} = \frac{1}{2} (1)(1) = \frac{1}{2}$

(3)



$$x_1=1 \quad y_1=1$$

$$x_2=3 \quad y_2=1$$

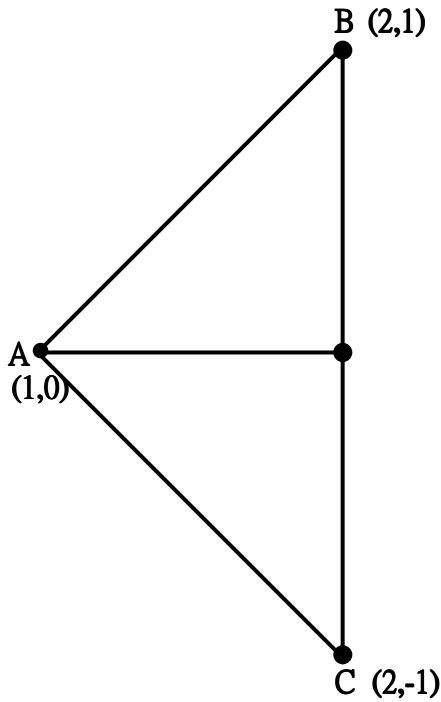
$$x_3=3 \quad y_3=7$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} (x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)) = \frac{1}{2} (1(1-7) + 3(7-1) + 3(1-1)) = \frac{1}{2} (-6+18) = \frac{1}{2}(12) = 6$$

如用幾何得

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \overline{BC} * \overline{AC} = \frac{1}{2} (7-1)(3-1) = \frac{1}{2}(6*2) = 6$$

(4)



$$x_1=1 \quad y_1=0$$

$$x_2=2 \quad y_2=1$$

$$x_3=2 \quad y_3=-1$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} (x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)) = \frac{1}{2} (1(1 - (-1)) + 2(-1 - 0) + 2(0 - 1)) = \frac{1}{2}$$

$$(2 - 2 - 2) = \frac{1}{2}(-2) = -1$$

取絕對值，得+1.

如用幾何得

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \overline{AD} * \overline{BC} = \frac{1}{2} (1)(2) = 1$$

